序

微分几何是一门古老的学科，历史悠久，它是以数学分析为工具来研究空间形式的数学分支．经典微分几何主要讨论曲线与曲面的局部性质．20世纪以来随着分析方法的发展，微分几何内容也越来越充实和深刻，除局部性质外，还研究关于图形的整体性质．由于整体微分几何的发展，这门学科虽然古老，但生命力至今还很旺盛，是当前基础研究的热门领域．它和其他许多数学学科以及理论物理等互相渗透．例如，它与微分方程、李群、变分学、泛函、拓扑、复变函数论、规范场论等的关系越来越密切，并互相影响、互相促进．因此，它的内容和方法也在不断更新．

多年来，一般高校微分几何教材是以经典的初等微分几何为其主要内容的．所谓“经典”，即如上所述，它所讨论的主要是图形的局部性质；所谓“初等”是指，为了初学者容易理解和入门，所研究的对象只限于三维欧几里得空间内的曲线和曲面．由于微分几何这个学科的不断

发展,也由于现代科学技术发展的需要,微分几何教材的内容所包含的范围必须扩大,即必须加入整体微分几何的部分内容.因此,编写一本整体微分几何教材已成为当前的需要,但这种教材目前国内尚不多见.沈一兵教授这本教材开始编写于20世纪80年代初期,经过十多年的教学实践,不断修改充实,并采用幺正活动标架法,使得几何问题化为外形式计算,突破了用坐标系来计算的传统框架,这是几何学研究的一种现代方法.沈一兵教授在整体微分几何领域的研究造诣很深,以他一丝不苟的治学精神写成的这本书,我相信一定是一本好书,对于它的出版我寄予厚望.

白正国

1997年秋于杭州

第1版前言

整体微分几何的名称最早可能来自德国几何学家W. Blaschke对凸闭曲线和卵形面的研究.后来经过许多数学家的努力,使之得到全面发展.今天已成为几何学、分析学和拓扑学相互交织的一个重要研究领域,也成为研究理论物理的有力工具之一.

为了满足我系数学专业的教学需要,在文献[1,2]的启发影响下,我们在20世纪80年代初期编写了有关整体微分几何的讲义.经过十多年教学实践,不断增删修改,才形成本书现在的样子.全书共分四章:第一章,活动标架法;第二章,曲线的整体微分几何;第三章,$\mathbf{E}^3$中曲面的整体微分几何;第四章,曲面的内蕴几何学.为了完整起见,另加了两个附录:附录A,欧氏空间点集拓扑概要;附录B,曲面的拓扑分类.

对于已经熟悉活动标架法和外微分形式的读者,可以跳过第一章.第四章的内容实质上是黎曼几何的范畴,目的是想引起读者对高维流形几何的兴趣.有关局部微

分几何计算，我们主要采用活动标架法.这不仅为了简化计算，也想使高年级学生能了解外微分形式的有关知识.本书内容基本上是自封闭的，凡涉及较多或较高深的其他数学知识，则尽可能注明参考文献.限于笔者水平，书中疵谬之处可能难免，热忱欢迎读者不吝指正.

这里我要感谢我的老师白正国教授对本书的关心和指导，感谢我系几何学教研室有关老师的热情支持，也感谢郭孝英老师和傅吉祥博士在具体工作上的帮助.

最后，我要感谢杭州大学出版社对本书出版的大力支持和帮助.

沈一兵

1997 年 9 月

再版跋

本书原是作者学习整体微分几何和外形式法的一些心得体会，整理后于1998年由原杭州大学出版社出版，拟作数学系高年级本科生的选修课教材. 出版后颇受广大读者重视和钟爱，不久书即告罄.

书中不少内容源自著名几何学大师陈省身先生的学术论著和演讲. 2001年先生来杭时曾对本书颇加嘉奖，并建议稍增内容，译成英文. 但由于作者拖沓，一直未能兑现. 不料先生于2004年12月3日突然仙逝，作者悲悼之余，也对此事遗憾万分. 作者愿以再版此书敬献先生！

本版与初版的主要差别是增加了第五章：高维欧氏空间的超曲面. 这是三维欧氏空间中曲面论的最直接和最自然的推广，至今还在发展. 建议这一章作为学生讨论班的内容. 限于作者水平，书中难免谬误与不妥之处，欢迎广大读者批评指正.

最后，借此机会，谨向被本书引用的文献作者、对本书厚爱的读者、国家自然科学基金会、浙江大学数学系和浙江大学出版社，致以衷心感谢.

沈一兵

2005年9月

目　录

第一章　活动标架法

第二章　曲线的整体微分几何

第三章 E^3 中曲面的整体微分几何

第四章 曲面的内蕴几何学

第五章　高维欧氏空间的超曲面

第一章　活动标架法

活动标架法是由法国大数学家E. Cartan (1869～1951) 发扬光大的，现已成为研究微分几何和几何分析的有力工具. 我们在这里只作最初步的介绍，目的是为后面讨论曲线和曲面几何性质作准备.

§1　幺正标架

1.1　幺正标架

考虑通常的三维欧氏空间$\mathbf{E}^3$. 在$\mathbf{E}^3$中可引入一固定的右手系直角坐标标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$，其中O是原点，E_1,E_2,E_3是三个相互正交的单位向量，它们构成右手系. 本书中向量也用普通拉丁字母表示，省去了字母上头的箭头. 读者可从上下文中辨认这点.

$\mathbf{E}^3$中的一个**活动幺正标架**$\{x;e_1,e_2,e_3\}$是指任一点$x\in\mathbf{E}^3$和从x出发的任意三个相互正交的单位向量e_1,e_2,e_3，它们构成右手系，如图 I-1 所示. 显然，$\{O;E_1,E_2,E_3\}$也是一个幺正标架，但它一旦取定后，就固定不动了. $\mathbf{E}^3$中的点x对应有位置向量$\overrightarrow{Ox}$；以后我们就把x看成位置向量$\overrightarrow{Ox}$而不再一一说明.

$\mathbf{E}^3$中所有幺正标架的全体构成一个**标架空间**，它依赖于六个参数：三个参数用来确定标架的顶点x的位置，三个参数用来确定右手系的三个单位向量$\{e_1,e_2,e_3\}$绕顶点的旋转. 从刚体运动学知，活动标架$\{x;e_1,e_2,e_3\}$可由固定标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$经适当平移和旋转而得. 六个参数可理解为x的三个坐标和标架旋转的三

个 Euler 角.

$\mathbf{E}^3$ 中的一个运动是指由平移和旋转组成的一个点变换. 在运动下,空间两点的距离和两向量之间的角度都保持不变. 显然,所有运动的全体构成一个群 G,称为 $\mathbf{E}^3$ 的运动群. $\mathbf{E}^3$ 中任一幺正标架总可由固定标架经一运动(即 G 的一元素)得来. 因此,$\mathbf{E}^3$ 的运动群 G 与标架空间是一一对应的. 我们可把幺正标架看成运动群 G 的元素的几何表示,从而使标架空间与 G 等同起来.

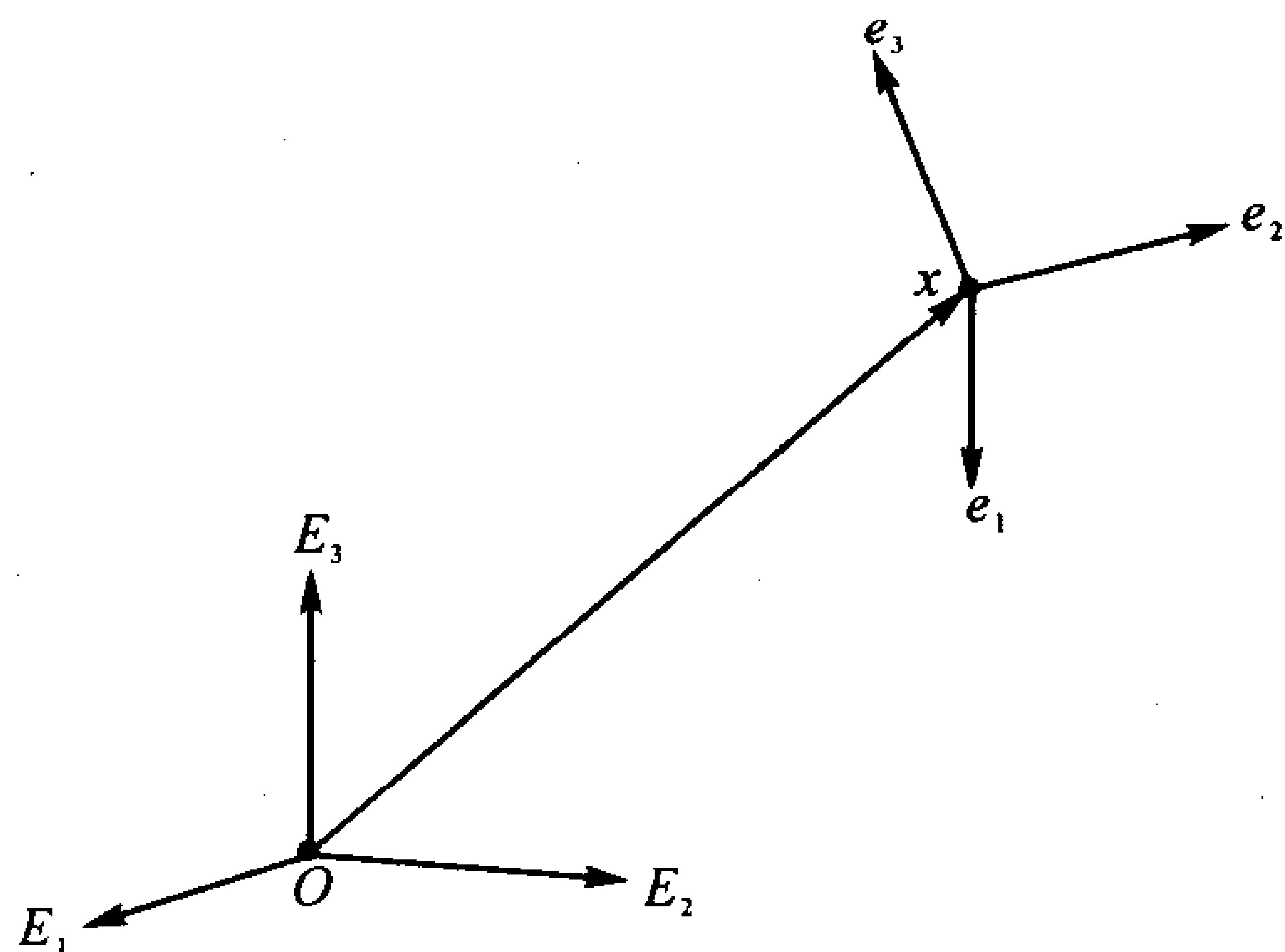


图 I-1

现设 $\mathbf{E}^3$ 中连续可微地变动的幺正标架依赖于 $m(\leqslant 6)$ 个参数 $u^1,u^2,\cdots,u^m$:

$$x = x(u^1,\cdots,u^m), \quad e_i = e_i(u^1,\cdots,u^m), \quad (i = 1,2,3).$$

那么,这样的幺正标架的全体称为 m 参数的活动标架场,它们构成标架空间(即 G)的一个 m 维子空间. E. Cartan 的活动标架法的主要思想是,通过活动标架这座桥梁,把所研究的几何图形(子空间)看成 G 的子空间,然后把 G 的性质自然地诱导到这个子空间上,从而得出所要研究的图形在 G 变换下不变的几何性质. 这正是 Lie 群论在微分几何上的应用.

下面举两个大家熟悉的例子.

例 1(单参数幺正标架场) 给定 $\mathbf{E}^3$ 中一条光滑曲线 $C: x = x(s)$,其中 s 为弧长参数. 在曲线 C 上每点可配置一个 Frenet 标架:

$$x = x(s),$$
$$e_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T(s),$$
$$e_2 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right| = N(s),$$
$$e_3 = T(s) \times N(s) = B(s).$$

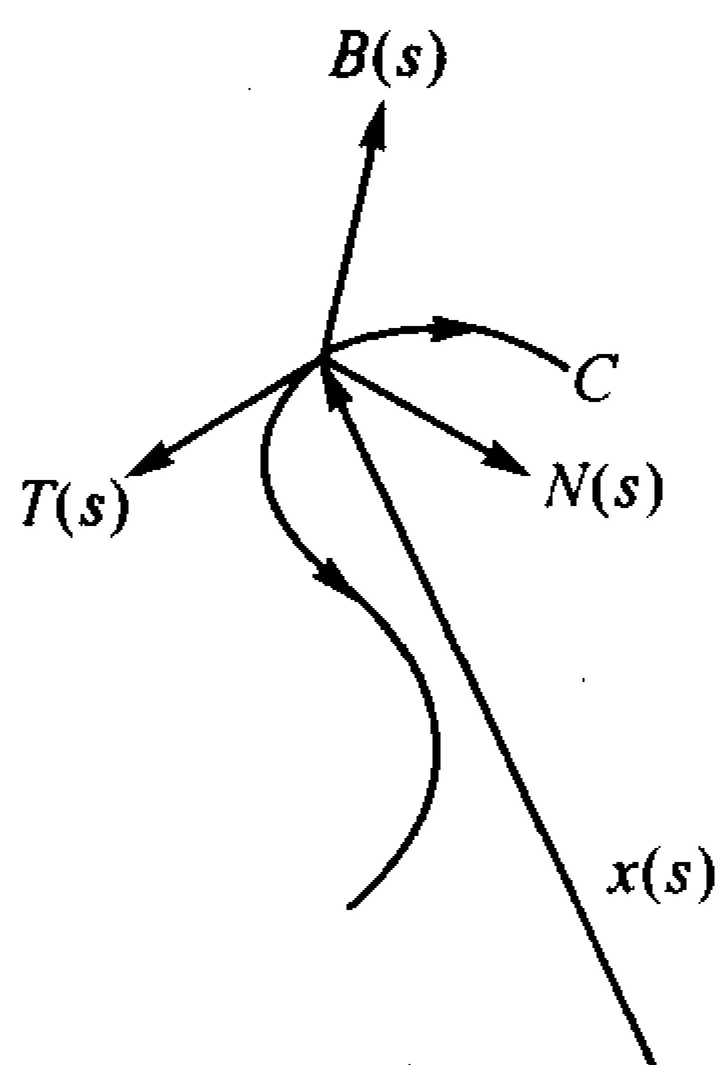


图 I-2

这样，$\{x(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$就构成一单参数活动标架场. 反之，一个单参数活动标架场的顶点描绘出空间的一条曲线(见图 I-2). 因此，空间曲线 C 可看成运动群 G 的一维子空间.

例 2(双参数幺正标架场)　给定$\mathbf{E}^3$中一片正则曲面M：$x = x(u,v)$，其中(u,v)为一般坐标网. 于是，在M的每点$x(u,v)$可配置一个幺正标架：

$$x = x(u,v),$$
$$e_1 = \frac{x_u}{|x_u|},$$
$$e_2 = \frac{x_v - (x_v \cdot e_1)e_1}{|x_v - (x_v \cdot e_1)e_1|},$$
$$e_3 = e_1 \times e_2 = n(u,v).$$

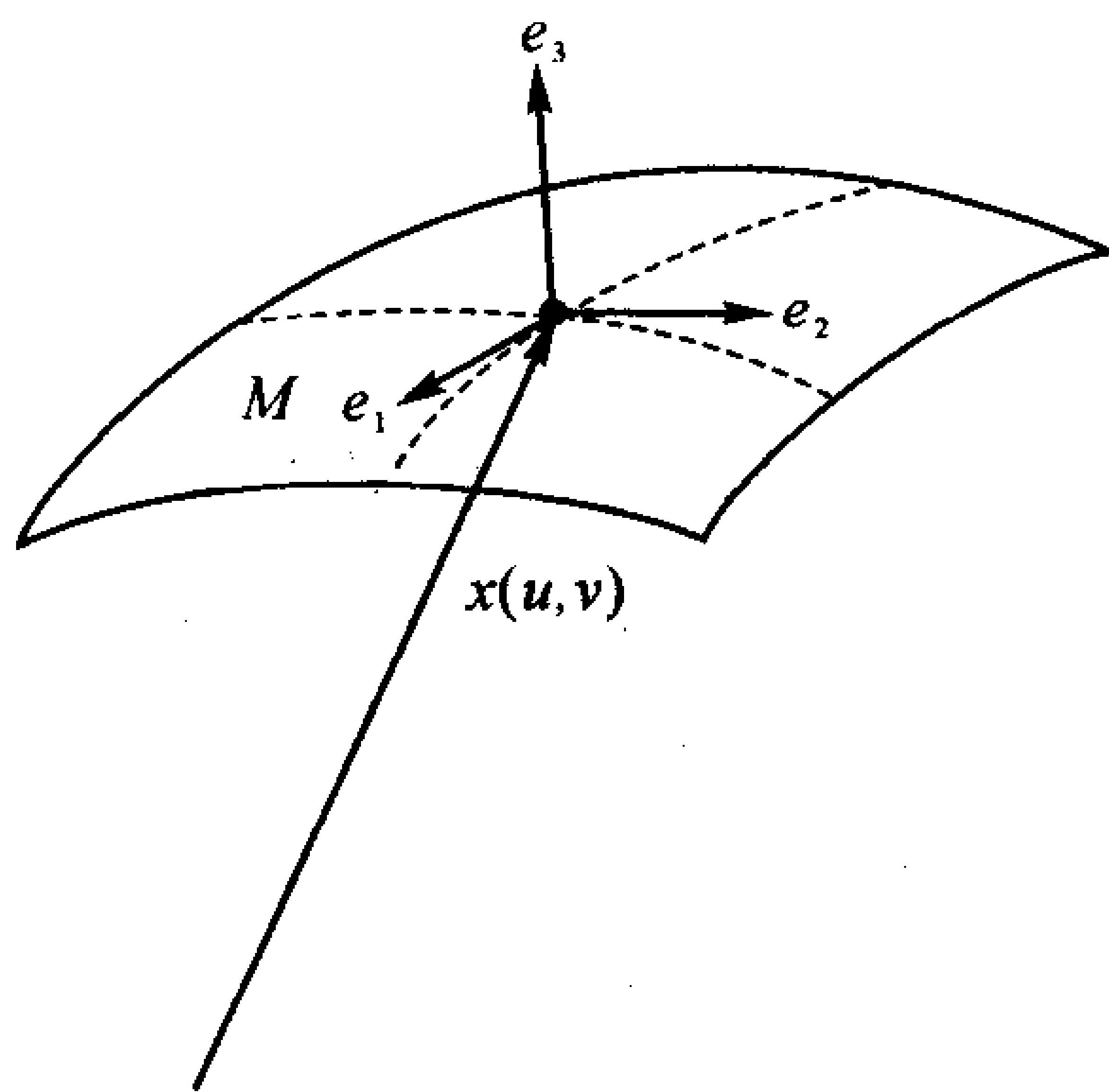


图 I-3

这里$x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$，$x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}$，$n(u,v)$就是$M$在$x$的单位法向量. 这样，$\{x(u,v);e_1(u,v),e_2(u,v),e_3(u,v)\}$就构成一双参数的活动标架场(见图 I-3). 反之，任一双参数活动标架场的顶点描绘出空间一片曲面. 因此，曲面可看成运动群G的二维子空间.

1.2 幺正标架的运动方程

设$\{x(u);e_i(u)\}$是$\mathbf{E}^3$中的$m(\leqslant 6)$参数活动标架场，这里约定

$$u=(u^1,\cdots,u^m),\quad i,j,k=1,2,3.$$

它们关于固定幺正标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$有分解式

$$\begin{cases}x=x^i(u)E_i,\\ e_i=a_i^j(u)E_j.\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$x^i(u)$和$a_i^j(u)$都是参数u的函数. 这里及以后，我们采用 Einstein 求和约定：凡一项中出现两个相同的指标（一个在上，一个在下）即表示对该指标求和. 这个指标称为**哑指标**，或**求和指标**.

(1.1) 中(a_i^j)是正交矩阵，设其逆矩阵为(b_i^j)，则

$$E_i=b_i^je_j.\tag{1.2}$$

取(1.1)的微分得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x^i)E_i,\\ \mathrm{d}e_i=(\mathrm{d}a_i^j)E_j.\end{cases}\tag{1.3}$$

若记$x(u+\mathrm{d}u)$处的标架为$\{x(u+\mathrm{d}u);e_i(u+\mathrm{d}u)\}$，则忽略二阶以上微分后，它便是$\{x+\mathrm{d}x;e_i+\mathrm{d}e_i\}$. 因此，(1.3) 表示标架$\{x(u);e_i(u)\}$经无穷小变换$u\mapsto u+\mathrm{d}u$后，无穷小位移$\mathrm{d}x$和无穷小向量$\mathrm{d}e_i$在固定幺正标架下的分解式. 注意到

$$\mathrm{d}x^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha,\quad \mathrm{d}a_i^j=\frac{\partial a_i^j}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha\quad(\alpha=1,\cdots,m),$$

把(1.2)代入(1.3)便得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\omega^ie_i,\\ \mathrm{d}e_i=\omega_i^je_j,\end{cases}\tag{1.4}$$

其中，

$$\omega^i = \Gamma^i_\alpha(u)\mathrm{d}u^\alpha = b^i_j \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha,$$
$$\omega_i{}^j = \Gamma^j_{i\alpha}(u)\mathrm{d}u^\alpha = b^j_k \frac{\partial a^k_i}{\partial u^\alpha}\mathrm{d}u^\alpha. \tag{1.5}$$

由(1.5)，ω^i 和 $\omega_i{}^j$ 都是 $\mathrm{d}u^\alpha(\alpha = 1,\cdots,m)$ 的一次形式，其系数是 u^α 的函数．它们是关于变量 u^α 的一次微分形式，或 Pfaff 形式，称为活动标架的无穷小运动分量．

$\omega_i{}^j$ 不是都独立的．因为 e_i 是幺正标架，即

$$e_i e_j = \delta^j_i.$$

微分上式，再利用(1.4)，便有

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0. \tag{1.6}$$

注意，这里 i 和 j 都不作和．由(1.6)可见，九个 ω^j_i 其实只有三个．方程(1.4)连同关系式(1.6)称为活动标架的运动方程，其中系数 ω^i 是标架的无穷小位移分量；ω^j_i 是标架的无穷小旋转分量．后面我们将看到，这些一次微分形式还要满足某些微分关系式．

由(1.4)，在幺正标架下，子空间上弧长的微分(即线素)可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}x|^2 = (\omega^i e_i)(\omega^j e_j) = \sum_{i=1}^{3}(\omega^i)^2. \tag{1.7}$$

现在自然要问：任意给定六个 $m(\leqslant 6)$ 参数的一次微分形式 ω^i 和 ω^j_i(满足关系(1.6))，是否能在 $\mathbf{E}^3$ 中确定一 m 参数活动标架场，使它的无穷小运动分量就是这六个一次微分形式？这个问题的存在性解答将在后面 §3 中给出，这里先叙述它的唯一性结果．

定理 1.1(唯一性)　已给 $m(\leqslant 6)$ 参数的两个活动标架场 $\{x;e_i\}$ 和 $\{\bar{x};\bar{e}_i\}$，它们的无穷小运动分量分别为 $\{\omega^i,\omega^j_i\}$ 和 $\{\bar{\omega}^i,\bar{\omega}^j_i\}$．若 $\bar{\omega}^i = \omega^i$，$\bar{\omega}^j_i = \omega^j_i$，则这两个活动标架场可通过 $\mathbf{E}^3$ 中的一个运动相重合．

证明　对于某一固定参数 $u_0 = (u^1_0,\cdots,u^m_0)$，可通过 $\mathbf{E}^3$ 中的

一个运动使

$$\{x(u_0);e_i(u_0)\} = \{\bar{x}(u_0);\bar{e}_i(u_0)\} \quad (i,j=1,2,3).$$

设$\{e_i\}$和$\{\bar{e}_i\}$关于固定幺正标架$\{O;E_1,E_2,E_3\}$的表示为

$$e_i = a_i^j E_j, \quad \bar{e}_i = \bar{a}_i^j E_j.$$

代入运动方程便有

$$\mathrm{d}a_i^j = \omega_i^k a_k^j,$$

$$\mathrm{d}\bar{a}_i^j = \bar{\omega}_i^k \bar{a}_k^j = \omega_i^k \bar{a}_k^j \qquad (1 \leqslant i,j,k \leqslant 3),$$

这里应用了条件$\bar{\omega}_i^k = \omega_i^k$. 由于关系(1.6),我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Big(\sum_i a_i^j \bar{a}_i^k\Big) &= \sum_i (\omega_i^l a_l^j \bar{a}_i^k + a_i^j \omega_i^l \bar{a}_l^k) \\ &= \sum_i (\omega_i^l + \omega_l^i) a_l^j \bar{a}_i^k \\ &= 0.\end{aligned}$$

这表示$\sum_i (a_i^j \bar{a}_i^k)$与$u=(u^1,\cdots,u^m)$无关. 然而,由正交矩阵性质,$\sum_i a_i^j a_i^k = \delta_k^j$,并且在$u_0=(u_0^1,\cdots,u_0^m)$处,

$$a_i^j(u_0) = \bar{a}_i^j(u_0).$$

因此,

$$\sum_i a_i^j \bar{a}_i^k = \sum_i a_i^j(u_0)\bar{a}_i^k(u_0) = \sum_i a_i^j(u_0) a_i^k(u_0) = \delta_k^j.$$

于是,

$$\sum_i (a_i^j - \bar{a}_i^j) a_i^k = 0.$$

由线性方程组理论,可见

$$a_i^j = \bar{a}_i^j.$$

因此,对一切u,我们有$e_i = \bar{e}_i$. 再由运动方程及定理条件,有

$$\mathrm{d}(x - \bar{x}) = \sum_i \omega^i (e_i - \bar{e}_i) = 0.$$

于是,

$$x - \bar{x} = x(u_0) - \bar{x}(u_0) = 0,$$

即 x 与 $\bar{x}$ 只差 $\mathbf{E}^3$ 中的一个运动. 证毕.

习　　题

1. 写出例 1 中单参数活动标架场的运动方程.

2. 设两族相同参数的活动标架 $\{x;e_i\}$ 和 $\{\bar{x};\bar{e}_i\}$ 之间有

$$\bar{e}_i = A_i^j e_j,$$

试证：(1) $\bar{\omega}_i^k A_k^j = \mathrm{d}A_i^j + \omega_k^j A_i^k$;

$$(2)\ \bar{\Gamma}_{i\alpha}^k A_k^i = \frac{\partial A_i^j}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{k\alpha}^j A_i^k,$$

其中 $\bar{\omega}_i^k = \bar{\Gamma}_{i\alpha}^k \mathrm{d}u^\alpha$, $\omega_i^k = \Gamma_{i\alpha}^k \mathrm{d}u^\alpha (\alpha = 1,\cdots,m)$.

3. 设例 2 中曲面的第一基本形式为

$$I = E(u,v)(\mathrm{d}u)^2 + G(u,v)(\mathrm{d}v)^2,$$

试证：对于例 2 所述的双参数活动标架场，其无穷小位移分量是

$$\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u,\quad \omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v,\quad \omega^3 = 0.$$

§2　外微分形式

为了完全解决上节提出的问题，有必要从代数和分析的角度进一步研究一次微分形式.

2.1　外代数

设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 m 维向量空间，它的一个基为 $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m\}$. 于是，任何元素 $\xi \in V$ 都可以唯一地表为

$$\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,m).$$

我们用如下方法对 V 中元素从形式上定义一种乘法，记为："$\wedge$". 首先，对 V 的基元素从形式上作下列乘积：

$$
\begin{array}{ll}
\sigma_\alpha, & \alpha = 1, \cdots, m; \\
\sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta, & 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant m; \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sigma_{\alpha_1} \wedge \sigma_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}, & 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \leqslant m; \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_m. &
\end{array}
$$

其次，对固定的 $k(\geqslant 2)$，任意 k 个基元素的乘积满足下列条件：

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_q} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \\
= -\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_q} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}, \\
(\alpha_1, \cdots, \alpha_k = 1, \cdots, m; \quad 1 \leqslant p, q \leqslant k; \quad 2 \leqslant k \leqslant m)
\end{gathered}
$$

即两基元素交换位置，乘积变号. 由此可见，若 k 个基元素的乘积中出现两个相同的元素，则其值为零.

最后，利用线性扩张，把这种乘法推广到整个 V 上. 例如，设 $\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha, \quad \eta = \eta^\alpha \sigma_\alpha, \quad \zeta = \zeta^\alpha \sigma_\alpha$，则

$$
\begin{aligned}
\xi \wedge \eta &= (\xi^\alpha \sigma_\alpha) \wedge (\eta^\beta \sigma_\beta) \\
&= \xi^\alpha \eta^\beta \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta = \sum_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta \\ \eta^\alpha & \eta^\beta \end{vmatrix} \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta;
\end{aligned}
$$

$$
\xi \wedge \eta \wedge \zeta = \sum_{\alpha<\beta<\gamma} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta & \xi^\gamma \\ \eta^\alpha & \eta^\beta & \eta^\gamma \\ \zeta^\alpha & \zeta^\beta & \zeta^\gamma \end{vmatrix} \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta \wedge \sigma_\gamma.
$$

$$
(1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant m)
$$

这种乘法称为**外乘法**，所得乘积称为**外积**.

V 中任意 k 个元素的外积称为 **k 重元素**. 由上述定义知，任一个 k 重元素必是 $\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} (1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leqslant m)$ 的线性组合. 一切 k 重元素的集合就是以 $\{\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}\}$ 为基的向量空间，记为 V_k. 它的维数是 C_m^k. 显然，$V_1 = V$. 我们把 $\mathbf{R}$ 记为 V_0. 这样就有 $m+1$ 个向量空间：

$$V_0, V_1, \cdots, V_m.$$

V_0 的基取为 1,其他的基便是本节开头所列. 注意,V_m 的基只有一个,即 $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_m$.

作这些向量空间的直和,记为

$$G(V) = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m = \bigoplus_{k=0}^{m} V_k.$$

向量空间 $G(V)$ 的维数是

$$\dim G(V) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k = 2^m.$$

现在我们把上述外乘法自然地引入 $G(V)$ 中,使 $G(V)$ 成为一个代数. 我们只要在 $G(V)$ 的基上定义外积,然后线性扩张到整个 $G(V)$ 上就可以了.

为此,令

$$\begin{aligned}&(\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}) \wedge (\sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_l})\\ &= \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \wedge \sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_l} \in V_{k+l}.\end{aligned}$$

注意,当 $k + l > m$ 时,上式右边必为零,因为这时右边至少有两个相同的元素.

不难验证,这样定义的外乘法满足结合律和分配律. 换言之,对于 $\varphi, \psi, \theta \in G(V)$, $a, b \in \mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}&(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta = \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) = \varphi \wedge \psi \wedge \theta,\\ &(a\varphi + b\psi) \wedge \theta = a\varphi \wedge \theta + b\psi \wedge \theta,\\ &\varphi \wedge (a\psi + b\theta) = a\varphi \wedge \psi + b\varphi \wedge \theta.\end{aligned}$$

注意,作外乘法时,次序不能随便变动. 定义了外乘法后的 $G(V)$ 就成为具有单位元 1 的结合代数,称之为向量空间 V 上的**外代数**,也称**Grassmann 代数**. 通常也把 $G(V)$ 记为 $\wedge(V)$,它的每个子空间 V_k 也记为 $\wedge^k(V)$.

命题 2.1 外积具有以下性质:

(1) 设 $\varphi \in V_p$, $\psi \in V_q$,则

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq}\psi \wedge \varphi.$$

(2) 设 $\varphi_r = a_r^\alpha \sigma_\alpha \in V_1$, $1 \leqslant r \leqslant k$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$,则

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & \cdots & a_1^{\alpha_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^{\alpha_1} & \cdots & a_k^{\alpha_k} \end{vmatrix} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}. \quad (2.1)$$

特别有

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = \det(a_\beta^\alpha)\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_m.$$

证明 (1) 因为外积满足分配律,故只须考虑

$$\varphi = \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}, \quad \psi = \sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}$$

的情况. 当 $p + q > m$ 时,等式自然成立. 当 $p + q \leqslant m$ 时,

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &= (\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \wedge (\sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) \\ &= (-1)^p \sigma_{\beta_1} \wedge (\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \wedge (\sigma_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) \\ &= (-1)^{pq}(\sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) \wedge (\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \\ &= (-1)^{pq}\psi \wedge \varphi. \end{aligned}$$

(2) 由分配律,

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k = 1}^{m} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}.$$

这说明 $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in V_k$. 但 V_k 的基是

$$\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \quad (1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leqslant m).$$

因此,我们只要把任意次序 $\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}$ 变换成标准次序 $\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}(1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leqslant m)$. 这样,

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \\ &= \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leqslant m} \Big(\sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)} (-1)^{[\alpha_1, \cdots, \alpha_k]} a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k} \Big) \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}, \end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}$ 表示对 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 的一切排列求和, $[\alpha_1, \cdots, \alpha_k]$ 表示某排列变成标准排列 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ 的置换数. 这正是命题中(2.1)的表达式. 证毕.

2.2 外微分形式

考虑 $\mathbf{R}^m = \{(u^1,\cdots,u^m) \mid u^\alpha \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m\}$. 在每点 $u = (u^1,\cdots,u^m)$ 我们有 m 个独立的微分 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^m$，以它们为基元素可生成一个实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间，记为 Lu. 按 §2 中 2.1 的方法，便得 Lu 上的外代数 $\wedge(Lu) = \bigoplus_{k=0}^{m} \wedge^k(Lu)$. 在每个 k 维 $(0 \leqslant k \leqslant m)$ 子空间 $\wedge^k(Lu)$ 中，k 重元素具有如下形状：

$$\sum_{1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_k\leqslant m} a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_k}.$$

设 $U \subseteq \mathbf{R}^m$ 是一个开区域.

定义 U 上的一个*k 次外微分形式*是指在每点 $u \in U$ 确定 $\wedge^k(Lu)$ 中的一个 k 重元素，而且使得它在 U 上连续可微地变化，简称*k 形式*.

因此，$U \subseteq \mathbf{R}^m$ 上的一个 k 形式 ω 可表达为

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_k\leqslant m} a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)\mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_k} \\ &= \tilde{a}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)\mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_k}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

这里系数都是 U 上的可微函数，其中 $\tilde{a}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)$ 关于下指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是反对称的. 第二个表达式的方便之处是使用了 Einstein 求和约定. 对于固定的一点 $u \in U$，(2.2) 便表示 $\wedge^k(Lu)$ 中的一个 k 重元素. 换言之，一个 k 形式就是区域 U 上的一个 k 重元素场. 1 形式也称为 U 上的*Pfaff 形式*.

定义 已给 U 上 p 个 1 形式

$$\omega^r = a^r_\alpha \mathrm{d}u^\alpha,\quad 1 \leqslant r \leqslant p;\quad 1 \leqslant \alpha \leqslant m. \tag{2.3}$$

若 $p \times m$ 矩阵 (a^r_α) 的秩在 U 的每点都为 p，则称这 p 个 1 形式 $\{\omega^r\}$ 是*线性独立的*，或称*线性无关的*.

命题 2.2 (2.3) 所示的 p 个 1 形式是线性独立的充要条件为

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p \neq 0. \tag{2.4}$$

证明 由命题 2.1 的(2),我们有

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leqslant m} \begin{vmatrix} a^1_{\alpha_1} & \cdots & a^1_{\alpha_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a^p_{\alpha_1} & \cdots & a^p_{\alpha_p} \end{vmatrix} \mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_p}. \tag{2.5}$$

现在命题可根据定义和(2.5)直接得到,留给读者作为练习.

引理 2.3(Cartan 引理) 设$\{\omega^r, \varphi^r\}(1 \leqslant r \leqslant p \leqslant m)$是$2p$个1形式,其中$\{\omega^r\}$是线性独立的.那么,下列等式

$$\sum_{r=1}^{p} \varphi^r \wedge \omega^r = 0 \tag{2.6}$$

成立的充要条件是φ^r可表示为

$$\varphi^r = c_{rs}\omega^s \quad (1 \leqslant r, s \leqslant p), \tag{2.7}$$

且$c_{rs} = c_{sr}$.

证明 由外积性质,充分性是显然的.下证必要性.既然$\{\omega^r\}$是线性独立的,则可补充$m-p$个1形式$\omega^{p+1}, \cdots, \omega^m$,使这$m$个1形式构成$\wedge^1(V)$的新基.于是,1形式$\varphi^r$可用新基$\omega^1, \cdots, \omega^m$线性表示.设

$$\varphi^r = c_{rs}\omega^s + c_{r\lambda}\omega^\lambda, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \lambda \leqslant m.$$

代入(2.6)得

$$c_{rs}\omega^s \wedge \omega^r + c_{r\lambda}\omega^\lambda \wedge \omega^r = 0.$$

因为$\omega^s \wedge \omega^r = -\omega^r \wedge \omega^s$,故上式左边第一项合并同类项后得

$$\sum_{s<r} (c_{rs} - c_{sr})\omega^s \wedge \omega^r + c_{r\lambda}\omega^\lambda \wedge \omega^r = 0.$$

因为$\omega^s \wedge \omega^r (s < r)$和$\omega^\lambda \wedge \omega^r$都是$\wedge^2(V)$的基元,故上式意味着

$$c_{rs} = c_{sr}, \quad c_{r\lambda} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \leqslant r, s \leqslant p; \\ p+1 \leqslant \lambda \leqslant m \end{pmatrix}.$$

因此,φ^r必有(2.7)的表示式.证毕.

推论　设ω是非零1形式，则1形式φ与ω相差一因子的充要条件是$\varphi \wedge \omega = 0$.

引理 2.4　设$\omega^r (1 \leqslant r \leqslant p)$是$p$个线性独立的1形式，$\Omega$是2形式.那么，要使

$$\Omega \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\omega^1, \cdots, \omega^p) \tag{2.8}$$

的充要条件是存在p个1形式$\{\varphi^r\}$，使得

$$\Omega = \sum_{r=1}^{p} \omega^r \wedge \varphi^r. \tag{2.9}$$

证明　充分性是显然的.下证必要性.补充$m-p$个1形式$\omega^{p+1}, \cdots, \omega^m$，使$\{\omega^\alpha\}(1 \leqslant \alpha \leqslant m)$构成一新基.$\Omega$关于新基有表示式

$$\Omega = \sum_{r<s} c_{rs} \omega^r \wedge \omega^s + \sum_{r,\lambda} c_{r\lambda} \omega^r \wedge \omega^\lambda + \sum_{\lambda<\mu} c_{\lambda\mu} \omega^\lambda \wedge \omega^\mu.$$
$$(1 \leqslant r, s \leqslant p; \quad p+1 \leqslant \lambda, \mu \leqslant m)$$

条件(2.8)意味着$c_{\lambda\mu} = 0$，故上式成为

$$\Omega = \sum_r \omega^r \wedge \Big(\sum_s a_{rs} \omega^s + \sum_\lambda c_{r\lambda} \omega^\lambda\Big), \tag{2.10}$$

其中已令

$$a_{rs} = -a_{sr} = \frac{1}{2} c_{rs} \quad (r < s).$$

现在只要令

$$\varphi^r = \sum_s a_{rs} \omega^s + \sum_\lambda c_{r\lambda} \omega^\lambda,$$

(2.10)就化为(2.9).证毕.

2.3　外微分

用$\wedge^k(U)$表示$U \subseteq \mathbf{R}^m$上k形式的全体，并记$\wedge(U) = \bigoplus_{k=0}^{m} \wedge^k(U)$.我们要在$\wedge(U)$中引入一种微分运算，叫做**外微分**，仍采用记号“d”.为了书写方便，我们把$\wedge^k(U)$中的元素，即k形式写成

$$\omega = a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}, \tag{2.11}$$

其中指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 按 Einstein 求和约定从 1 到 m 求和，系数 $a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)$ 关于下指标是反对称的.

定义 外微分算子 d 是一映射，d：$\wedge^k(U)\to\wedge^{k+1}(U)$，它定义如下：对于(2.11) 所示的 $\omega\in\wedge^k(U)$，令

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\\ &= \frac{\partial a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\in\wedge^{k+1}(U).\end{aligned}$$

显然，若 $\omega\in\wedge^0(U)=C^\infty(U)$，则外微分就是普通微分. 若 $\omega\in\wedge^m(U)$，则 $\mathrm{d}\omega=0$，最后，把外微分运算扩张到整个 $\wedge(U)$ 上.

命题 2.5 外微分算子 d 具有如下性质：

(1) 若 φ,ψ 是任意两外微分形式，则

$$\mathrm{d}(\varphi\pm\psi)=\mathrm{d}\varphi\pm\mathrm{d}\psi.$$

(2) 若 $\omega\in\wedge^k(U)$，φ 是任意外微分形式，则

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\varphi)=\mathrm{d}\omega\wedge\varphi+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\varphi.$$

证明 (1) 是定义的直接结果. 下证(2).

设 ω 如(2.11) 所示，

$$\varphi=b_{\beta_1\cdots\beta_l}(u)\mathrm{d}u^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\beta_l}.$$

于是

$$\omega\wedge\varphi=a_{\alpha_1}\cdots a_k b_{\beta_1}\cdots b_{\beta_l}\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\wedge\mathrm{d}u^{\beta_1}\wedge\cdots\mathrm{d}u^{\beta_l}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\wedge\varphi) &= \left(\frac{\partial a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\gamma}b_{\beta_1\cdots\beta_l}+a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\frac{\partial b_{\beta_1\cdots\beta_l}}{\partial u^\gamma}\right)\mathrm{d}u^\gamma\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_1}\\ &\quad\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\beta_l}\\ &= \left(\frac{\partial a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\gamma}\mathrm{d}u^\gamma\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\right)\\ &\quad\wedge\left(b_{\beta_1\cdots\beta_l}\mathrm{d}u^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\beta_l}\right)\\ &\quad+(-1)^k(a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k})\end{aligned}$$

$$\wedge \left(\frac{\partial b_{\beta_1\cdots\beta_l}}{\partial u^\gamma}\mathrm{d}u^\gamma \wedge \mathrm{d}u^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\beta_l}\right)$$
$$= \mathrm{d}\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi.$$

证毕.

引理 2.6(Poincaré 引理) 任何外微分形式的两次外微分为零,即 $\mathrm{d}^2 = 0$.

证明 设 $\omega \in \Lambda^k(U)$ 如(2.11)所示.按定义,

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_k}.$$

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \frac{\partial^2 a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}\mathrm{d}u^\gamma \wedge \mathrm{d}u^\beta \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_k}.$$
$$= \left(\sum_{\gamma<\beta}\left(\frac{\partial^2 a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}\right)\mathrm{d}u^\gamma \wedge \mathrm{d}u^\beta\right) \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{\alpha_k}$$
$$= 0.$$

证毕.

对于一个外微分形式 ω,若 $\mathrm{d}\omega = 0$,则称 ω 为**闭形式**;若存在另一外微分形式 θ 使 $\mathrm{d}\theta = \omega$,则称 ω 为**恰当形式**.由 Poincaré 引理,恰当形式必是闭形式.自然要问:闭形式是否必为恰当形式?一般来说,这是不对的.例如,考虑定义在 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 上的 1 形式

$$\omega = -\frac{v}{u^2+v^2}\mathrm{d}u + \frac{u}{u^2+v^2}\mathrm{d}v.$$

容易验证 $\mathrm{d}\omega = 0$.但 ω 在 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 上不是恰当形式.事实上,虽然可以作函数 $f = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}$ 使 $\mathrm{d}f = \omega$,但 f 在 v 轴($u = 0$)上不连续,故 f 不定义在整个 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 上.然而,可以证明,闭形式局部地是恰当形式,可参考文献[6].

2.4 微分形式的积分

在数学分析中,有下列平面上的 Green 公式:

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.12}$$

其中右边是 xy 平面上由闭曲线 C 所包围的有界区域 D 上的二重积分，左边是沿闭曲线 C 的正向进行的曲线积分. 这里 C 的正向是指：当我们沿着 C 的正向前进时，区域 D 总在我们左边. 曲线 C 称为区域 D 的边界，可记为 ∂D.

若我们引入有向面积元 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，并令

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

其中 P,Q 均为 x,y 的函数，则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

因此，(2.12) 可改写为

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega.$$

这个公式可推广到高维的一般情况.

定理 2.7 设 M 是 $\mathbf{E}^n$ 中的一个 p 维($1 \leqslant p \leqslant n$) 定向区域，$\partial M$ 是 M 的边界，具有从 M 诱导的定向. 若 ω 是 M 上的$(p-1)$形式，则有

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega. \tag{2.13}$$

这个公式通常称为**Stokes 公式**，它的证明超出了本讲义的范围，读者可参考文献[6].

当 $n=3, p=2$ 时，M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的一定向曲面区域(即规定了曲面法方向的曲面区域)，M 的边界 ∂M 是 $\mathbf{E}^3$ 的一条闭曲线，它的正向与 M 的法方向符合右手法则，如图 I-4 所示.

设

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

其中 P,Q,R 是 x,y,z 的函数，那么

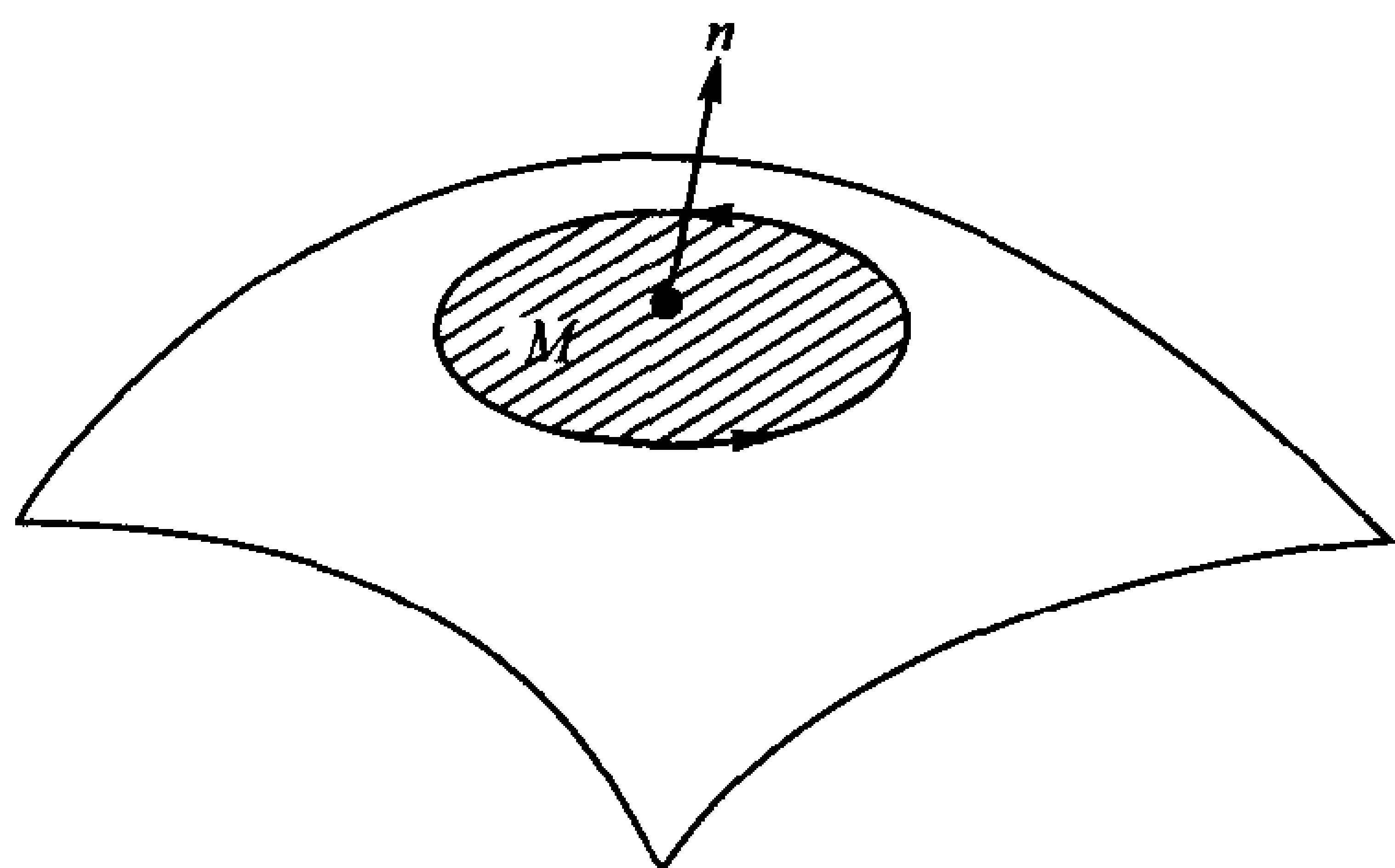


图 I-4

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

这时 Stokes 公式(2.13) 就成为

$$\int_{\partial M} P dx + Q dy + R dz = \int_M \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

这就是通常数学分析中的 Stokes 公式.

当 $n = 3, p = 3$ 时, M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的一个区域, M 的边界 ∂M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的闭曲面.

设

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy, \qquad (2.14)$$

则(2.13) 成为

$$\int_{\partial M} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
$$= \int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

这就是数学分析中的 Gauss 公式(或称 Остроградский 公式).

习　　题

1. 详细证明命题 2.2.

2. 设$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$是 m 维向量空间 V 的基,$\varphi = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_p$ $(0 < p < m)$. 试证:若 $\omega \in V$ 满足 $\omega \wedge \varphi = 0$,则 ω 是 $\sigma_1, \cdots, \sigma_p$ 的线性组合.

3. 设 $\omega = \sum\limits_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant m} a_{\alpha\beta} \mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\beta$, $a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0$. 求证:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant m} \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} \right) \mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\beta \wedge \mathrm{d}u^\gamma.$$

4. 设 $\varphi = yz\mathrm{d}x + \mathrm{d}z$, $\psi = xz\mathrm{d}y + \cos y\mathrm{d}x$, $\eta = xy\mathrm{d}z - \sin z\mathrm{d}y$,计算:(1)$\varphi \wedge \psi$, $\psi \wedge \eta$, $\eta \wedge \varphi$; (2)$\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\psi$, $\mathrm{d}\eta$.

5. 设 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$,证明:

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

6. 求证:1 形式 $\omega = yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ 是闭形式,并且找出函数 f 使得 $\mathrm{d}f = \omega$.

7. 设 $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$ 是曲面的第一基本量. 作参数变换 $\tilde{u} = \tilde{u}(u,v)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(u,v)$,并记 $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ 是新参数下的第一基本量. 求证:

$$\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \mathrm{d}\tilde{u} \wedge \mathrm{d}\tilde{v} = \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

§3　可积系统

现在回到活动幺正标架．§1中已导出了一个$m(\leqslant 6)$参数的幺正标架场$\{x;e_i\}$所要满足的运动方程，其中包含六个1形式$\{\omega^i,\omega_i^j\}(\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3)$．

3.1　$\mathbf{E}^3$的结构方程

对运动方程(1.4)的两边进行外微分，根据引理2.6，得

$$0=\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=(\mathrm{d}\omega^i)e_i-\omega^i\wedge \mathrm{d}e_i=(\mathrm{d}\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j^i)e_i,$$

$$0=\mathrm{d}(\mathrm{d}e_i)=(\mathrm{d}\omega_i^j)e_j-\omega_i^j\wedge \mathrm{d}e_j=(\mathrm{d}\omega_i^j-\omega_i^k\wedge\omega_k^j)e_j.$$

由此，

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i, & \omega_i^j+\omega_j^i=0,\\ \mathrm{d}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j, & (1\leqslant i,j,k\leqslant 3).\end{cases}\tag{3.1}$$

这便是运动方程中六个1形式所要满足的微分关系式，它们称为**$\mathbf{E}^3$的结构方程**．结构方程反映了$\mathbf{E}^3$中活动幺正标架场的内在构成特征．从微分方程论的角度来说，结构方程是运动方程的可积性条件．事实上，§1中所提的存在性问题，现可解答如下．

定理3.1(存在性)　任意给定六个$m(\leqslant 6)$参数的1形式$\{\omega^i,\omega_i^j\}(\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3)$．如果它们满足结构方程(3.1)，则在$\mathbf{E}^3$中存在$m$参数的右手系活动幺正标架场$\{x;e_i\}$，使得它的无穷小运动分量就是这六个1形式，而且，这样的活动标架场确定到只差$\mathbf{E}^3$中的一个运动．

为了证明这个定理，我们必须叙述有关一阶微分方程组的可积性条件．

3.2　Frobenius定理

设U是$\mathbf{R}^m$中的一个连通区域，已给U上$p(<m)$个线性独立

的 1 形式

$$\varphi^r = a_\alpha^r(u)\mathrm{d}u^\alpha, \quad 1 \leqslant r \leqslant p, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant m. \tag{3.2}$$

这里，$u = (u^1, \cdots, u^m) \in U$. 作方程组

$$\varphi^r = 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant p. \tag{3.3}$$

它称为 U 上的一个 Pfaff 方程组. 既然(3.2)的 p 个 1 形式是线性独立的，不失一般性，可假设矩阵(a_α^r)中的前一个 p 阶子式(a_s^r)($1 \leqslant r, s \leqslant p$)是满秩的，即

$$\varphi^r = a_s^r(u)\mathrm{d}u^s + a_\lambda^r(u)\mathrm{d}u^\lambda, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \lambda \leqslant m.$$

定义　若在 U 中存在$(m-p)$维曲面 M：

$$u^r = u^r(u^{p+1}, \cdots, u^m), \quad 1 \leqslant r \leqslant p, \tag{3.4}$$

使得把上述函数 $u^r(u^{p+1}, \cdots, u^m)$ 代入 φ^r 后，$\varphi^r \equiv 0$，即

$$a_s^r(u^{p+1}, \cdots, u^m) \frac{\partial u^s}{\partial u^\lambda}\mathrm{d}u^\lambda + a_\lambda^r(u^{p+1}, \cdots, u^m)\mathrm{d}u^\lambda \equiv 0,$$

则称 M 为方程组(3.3)的积分曲面，M 的方程(3.4)称为方程组(3.3)的解. 若过 U 中每点都存在唯一的$(m-p)$维积分曲面，则方程组(3.3)称为完全可积的.

定理 3.2(Frobenius 定理)　Pfaff 方程组(3.3)完全可积的充要条件是

$$\mathrm{d}\varphi^r \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(\varphi^1, \cdots, \varphi^p), \tag{3.5}$$

即 $\mathrm{d}\varphi^r = 0$ 是(3.3)的代数推论.

证明　因为$\{\varphi^r\}$是线性独立的，不妨设

$$\det(a_s^r(u)) \neq 0, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p.$$

用$(b_s^r(u))$表示$(a_s^r(u))$的逆矩阵. 这样，方程组(3.3)等价于方程组

$$\omega^r := b_s^r \varphi^s = 0, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p. \tag{3.6}$$

(3.6)就是

$$\omega^r = \mathrm{d}u^r + c_\lambda^r \mathrm{d}u^\lambda = 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \lambda \leqslant m, \tag{3.7}$$

其中

$$c_\lambda^r = b_s^r a_\lambda^s, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \lambda \leqslant m.$$

显然,方程组(3.7)等价于下面的一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial u^r}{\partial u^\lambda} = -c_\lambda^r(u), \quad 1 \leqslant r \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \lambda \leqslant m. \tag{3.8}$$

根据一阶偏微分方程的理论,(3.8)完全可积的充要条件是(即(3.4)中函数 u^r 的二阶偏导数次序可交换)

$$\frac{\partial c_\lambda^r}{\partial u^\mu} - \frac{\partial c_\lambda^r}{\partial u^s} c_\mu^s = \frac{\partial c_\mu^r}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial c_\mu^r}{\partial u^s} c_\lambda^s, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant p, \quad p+1 \leqslant \lambda, \mu \leqslant m. \tag{3.9}$$

以下我们来验证这一点.

对(3.6)外微分,得

$$d\omega^r = db_s^r \wedge \varphi^s + b_s^r d\varphi^s.$$

由引理 2.4,条件(3.5)意味着

$$d\varphi^r = \varphi_s^r \wedge \varphi^s,$$

其中 φ_s^r 是 U 上的 1 形式.因此,

$$\begin{aligned} d\omega^r &= (db_s^r + b_t^r \varphi_s^t) \wedge \varphi^s \\ &= (a_s^t db_t^r + a_s^q b_t^r \varphi_q^t) \wedge \omega^s \\ &\equiv 0 \quad \mod(\omega^1, \cdots, \omega^p). \end{aligned} \tag{3.10}$$

这表明,对 Pfaff 方程组(3.6)来说,类似于(3.5)的条件也成立.反之,从(3.10)可推出(3.5).

另一方面,对(3.7)外微分,可得

$$\begin{aligned} d\omega^r &= dc_\lambda^r \wedge du^\lambda \\ &= \frac{\partial c_\lambda^r}{\partial u^s} du^s \wedge du^\lambda + \sum_{\lambda, \mu = p+1}^m \left(\frac{\partial c_\lambda^r}{\partial u^\mu} - \frac{\partial c_\lambda^r}{\partial u^s} c_\mu^s \right) du^\mu \wedge du^\lambda. \end{aligned}$$

由此可见,(3,10)成立当且仅当上面右边第二项消失,即(3.9)成立.因此,方程组(3.8)完全可积的充要条件是(3.10),即(3.5).证毕.

注 Frobenius 定理有多种表达形式，也有多种证明方法，参见文献[6].

定理 3.1 的证明

用已给的六个 1 形式 $\{\omega^i,\omega_i^j\}$ $(\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3)$ 构造下列未知变量为 $x(u)$ 和 $e_i(u)$ 的向量形式的 Pfaff 方程组：

$$\begin{cases}\varphi := \mathrm{d}x-\omega^i e_i=0,\\ \psi_i := \mathrm{d}e_i-\omega_i^j e_j=0.\end{cases}\qquad 1<i,j\leqslant 3 \tag{3.11}$$

对(3.11)外微分，利用(3.11)得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi &= -(\mathrm{d}\omega^i)e_i+\omega^i\wedge \mathrm{d}e_i\\ &=\sum_i(-\mathrm{d}\omega^i+\omega^j\wedge\omega_j^i)e_i+\omega^i\wedge\psi_i,\\ \mathrm{d}\psi &= -(\mathrm{d}\omega_i^j)e_j+\omega_i^j\wedge \mathrm{d}e_j\\ &=\sum_j(-\mathrm{d}\omega_i^j+\omega_i^k\wedge\omega_k^j)e_j+\omega_i^j\wedge\psi_j.\end{aligned}$$

由于 ω^i,ω_i^j 满足结构方程，故得

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varphi\equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\varphi,\psi_i),\\ \mathrm{d}\psi_i\equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\varphi,\psi_i).\end{cases}\tag{3.12}$$

这正是方程组(3.11)的可积性条件. 由 Frobenius 定理，方程组(3.11)完全可积. 这就是说，给出任一初始条件：

$$x(u_0)=x_0,\quad e_i(u_0)=(e_i)_0,\quad 1\leqslant i\leqslant 3,$$

存在一 m 参数活动幺正标架场 $\{x(u);e_i(u)\}$，使当 $u=u_0$ 时，满足初始条件. 条件 $\omega_i^j+\omega_j^i=0$ 保证 $e_i(u)$ 是两两正交的单位向量. 不同的初始条件意味着不同的初始标架. 根据定理 1.1，它们的解只差空间的一个运动. 定理 3.1 证毕.

3.3 用活动标架法研究曲面

作为上述理论的应用，我们考虑 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面. 因为对曲线来说，它对应单参数的活动幺正标架场，这时 ω^i 和 ω_i^j 都是单参数的 1 形式，它们的外微分为零，故不存在结构方程.

3.3.1　第一和第二基本形式

设 $\mathbf{E}^3$ 中曲面 M 的方程为 $x = x(u^1, u^2)$，这里 x 表示 M 上点的位置向量. 记 $x_\alpha = \dfrac{\partial x}{\partial u^\alpha}, \alpha = 1, 2$，它们不一定正交，但 $x_1 \times x_2 \neq 0$. 取

$$e_3 = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|},$$

于是，幺正标架的另外两个向量 e_1 和 e_2 必位于与 e_3 正交的 M 的切平面内，并且它们还可以在切平面内绕 e_3 随意旋转. 设切平面上有这样两组标架 $\{e_1, e_2\}$ 和 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$，它们之间的转角为 θ 见(图 I-5). 那么便有

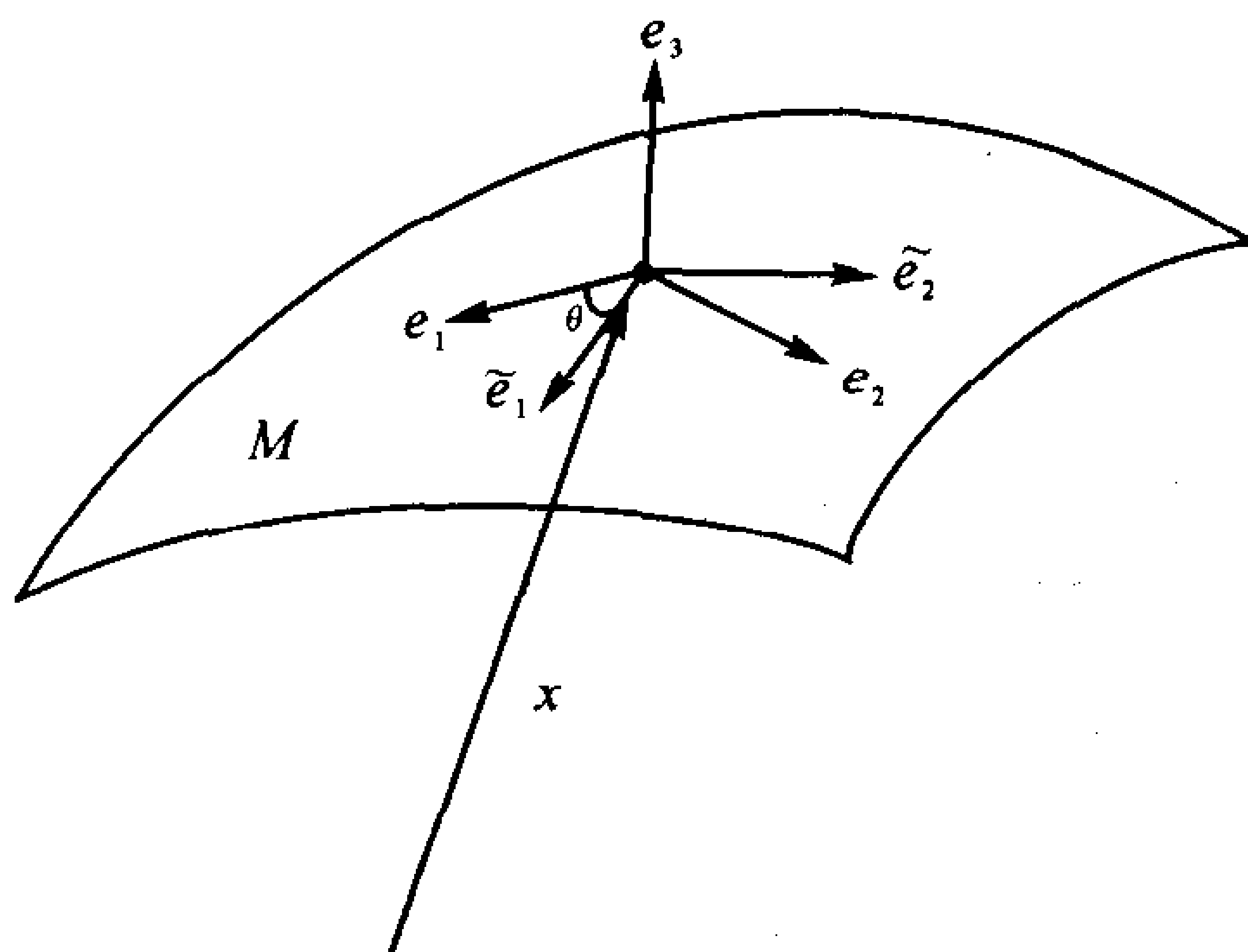


图 I-5

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta, \\ \tilde{e}_2 = -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta. \end{cases} \tag{3.13}$$

我们要研究在上述旋转变换下不变的曲面的几何性质.

对于这样的双参数活动标架场 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 其运动方程为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \omega^\alpha e_\alpha, \quad \omega^3 = 0, \\ \mathrm{d}e_i = \omega_i^j e_j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

这里及下面，指标取值范围约定如下：

$$\alpha,\beta,\cdots = 1,2;\quad i,j,k,\cdots = 1,2,3.$$

因为 $\mathrm{d}x = x_\alpha \mathrm{d}u^\alpha$，$\{x_1,x_2\}$ 也是切平面上的基(不一定正交)，故存在满秩矩阵(a_α^β)，使 $x_\alpha = a_\alpha^\beta e_\beta$. 代入 $\mathrm{d}x = x_\alpha \mathrm{d}u^\alpha$，并与(3.14)的第一式相比较，得

$$\omega^\alpha = a_\beta^\alpha \mathrm{d}u^\beta. \tag{3.15}$$

既然(a_α^β)是满秩的，故 ω^1 与 ω^2 线性无关，即 $\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$.

现设对于活动标架场$\{x;\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3\}$有

$$\mathrm{d}x = \tilde{\omega}^\alpha \tilde{e}_\alpha,\quad \tilde{\omega}^3 = \omega^3 = 0.$$

将(3.13)代入上式，再与(3.14)相比较，可得

$$\begin{cases}\tilde{\omega}^1 = \omega^1\cos\theta + \omega^2\sin\theta,\\ \tilde{\omega}^2 = -\omega^1\sin\theta + \omega^2\cos\theta.\end{cases}$$

由此不难验证

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2, \tag{3.16}$$

即这是在变换(3.13)下不变的 2 形式.

由(3.14)的第一式，M 的**第一基本形式**可写为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}x|^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2, \tag{3.17}$$

即它也是在变换(3.13)下不变的. 注意，这是二次微分形式，不是二次外微分形式.

把(3.15)代入(3.17)，可得

$$\mathrm{I} = E(\mathrm{d}u^1)^2 + 2F\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + G(\mathrm{d}u^2)^2,$$

其中

$$E = (a_1^1)^2 + (a_1^2)^2,\quad F = (a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2),\quad G = (a_2^1)^2 + (a_2^2)^2.$$

容易验证

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1)\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2 = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2. \tag{3.18}$$

这表明 $\omega^1 \wedge \omega^2$ 就是曲面 M 上的(有向)面积元.

特别地,当参数曲线网(u^1,u^2)为正交网时,我们可取沿曲面的双参数活动幺正标架场$\{x;e_i\}$,使得

$$\text{I} = E(\mathrm{d}u^1)^2 + G(\mathrm{d}u^2)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \tag{3.19}$$

$$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u^1, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}u^2, \quad \omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG}\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2. \tag{3.20}$$

由于沿曲面 $\omega^3 = 0$,由(3.1)的第一式得

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \\ \mathrm{d}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2, \end{cases} \tag{3.21}$$

这里 $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ 由这组方程唯一确定. 事实上,设

$$\omega_1^2 = p\omega^1 + q\omega^2,$$

把它代入(3.21),便得

$$p = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}, \quad q = \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2},$$

即

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^1 + \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\omega^2. \tag{3.22}$$

由于 ω^1,ω^2 由第一基本量确定,$\mathrm{d}\omega^1,\mathrm{d}\omega^2$ 也然,故 ω_1^2 也由第一基本量所确定. 换言之,这些形式都是(关于曲面)内蕴的.

现在对 $\omega^3 = 0$ 外微分,利用(3.1),得

$$0 = \mathrm{d}\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3.$$

因为 $\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$,应用 Cartan 引理(引理 2.3),便有

$$\begin{cases} \omega_1^3 = b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2, \\ \omega_2^3 = b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2, \end{cases} \quad b_{12} = b_{21}. \tag{3.23}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 = -(\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2) \\ &= -(b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2)e_1 - (b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2)e_2. \end{aligned}$$

因此,曲面的第二基本形式是

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}e_3 = \omega_1^3\omega^1 + \omega_2^3\omega^2$$
$$= b_{11}(\omega^1)^2 + 2b_{12}\omega^1\omega^2 + b_{22}(\omega^2)^2. \qquad (3.24)$$

不难验证,二次微分形式 II 也与标架变换(3.13)无关.

如果把 II 写成普通形式

$$\mathrm{II} = L(\mathrm{d}u^1)^2 + 2M\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + N(\mathrm{d}u^2)^2,$$

则把(3.20)代入(3.24),比较上式便得

$$b_{11} = \frac{L}{E}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{M}{\sqrt{EG}}, \quad b_{22} = \frac{N}{G}. \qquad (3.25)$$

3.3.2 主曲率、Gauss 曲率和平均曲率

设曲面 M 上的曲线 C 由下列参数方程给出

$$u^\alpha = u^\alpha(s),$$

其中 s 是 C 的弧长参数. 设 C 的单位切向量 $T(s)$ 与 e_1 的交角为 θ,在切平面内取单位向量 Q,使得 $Q = e_3 \times T$(见图 I-6). 于是,

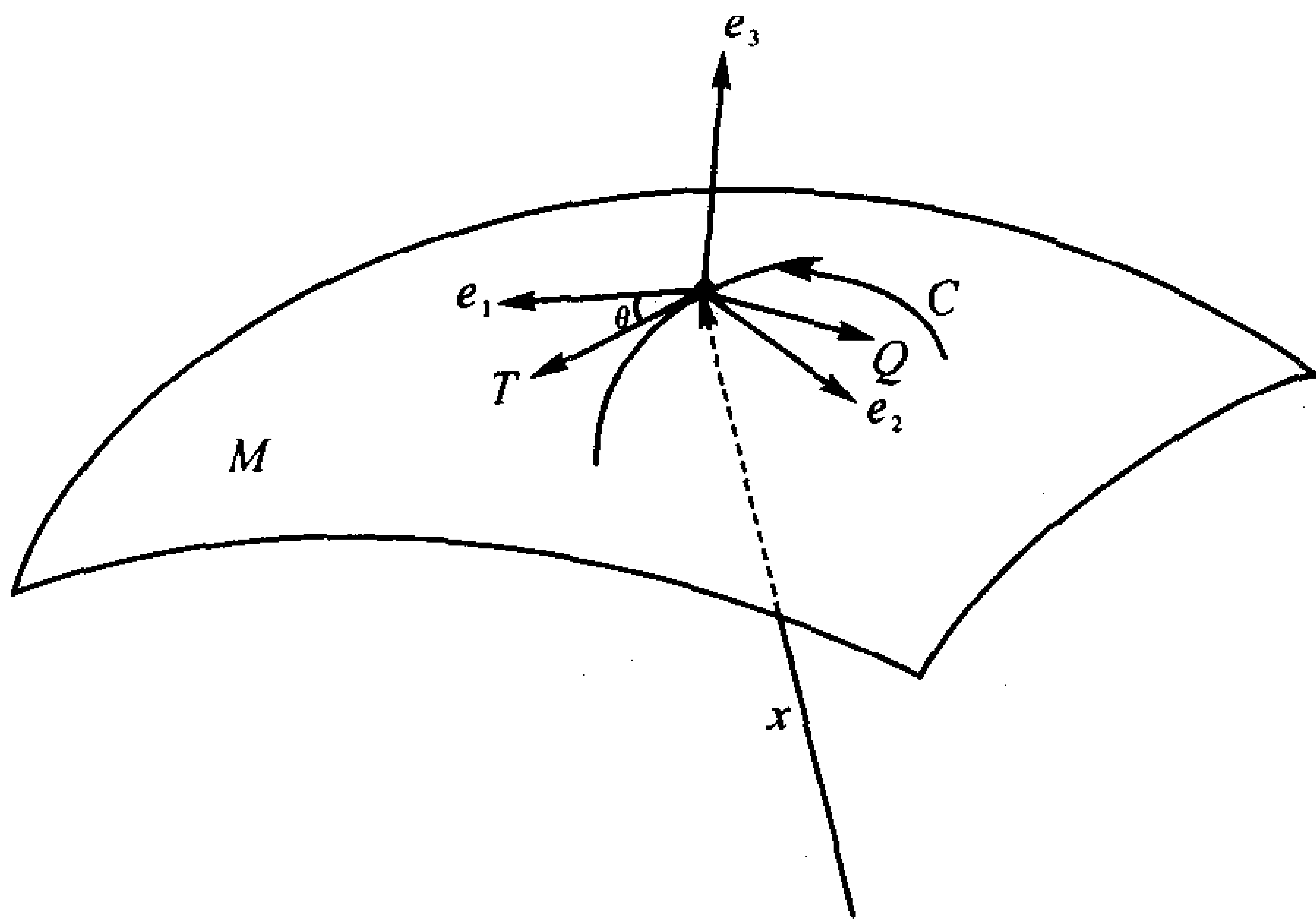


图 I-6

$$\begin{cases} T = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \\ Q = -e_1\sin\theta + e_2\cos\theta. \end{cases} \tag{3.26}$$

因为

$$T = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = (\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2)/\mathrm{d}s,$$

与(3.26)的第一式相比较，可见沿曲线 C 有

$$\omega^1 = \cos\theta\,\mathrm{d}s, \quad \omega^2 = \sin\theta\,\mathrm{d}s.$$

微分(3.26)的第一式，利用运动方程(3.14)，易得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}T &= (\mathrm{d}e_1)\cos\theta - e_1\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + (\mathrm{d}e_2)\sin\theta + e_2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= (\mathrm{d}\theta + \omega_1^2)Q + (\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta)e_3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

由此，曲线 C 的测地曲率是

$$k_g = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}Q = (\mathrm{d}\theta + \omega_1^2)/\mathrm{d}s. \tag{3.28}$$

沿 T 方向的法曲率是

$$\begin{aligned} k_n = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}e_3 &= (\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta)/\mathrm{d}s \\ &= (\omega_1^3\omega^1 + \omega_2^3\omega^2)/\mathrm{d}s^2 \\ &= \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

注意，在上面诸式中，所有的形式都依赖于单参数 s(曲线 C 的参数).

法曲率的极值称为主曲率，由(3.17)，(3.24)和(3.29)可知，主曲率是下列特征方程的根：

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0. \tag{3.30}$$

设方程(3.30)的两根为 k_1 和 k_2，则曲面的Gauss 曲率(总曲率)和平均曲率(中曲率)分别是

$$K = k_1 k_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2,$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}).$$

由于 Ⅰ 和 Ⅱ 都与标架旋转(3.13)无关,故方程(3.30)及其根也与(3.13)无关,从而 K 和 H 都是不变量.

定理 3.3(Gauss 美妙定理) 曲面的 Gauss 曲率 K 仅仅与曲面的第一基本量有关,因而是内蕴的.

证明 由结构方程和(3.23),有

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = (b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2) \wedge (-b_{21}\omega^1 - b_{22}\omega^2) \\ &= -(b_{11}b_{12} - b_{12}^2)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -K\omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned} \tag{3.31}$$

即 $K = -d\omega_1^2/(\omega^1 \wedge \omega^2)$. 既然 ω_1^2 是内蕴的(见(3.22)),故 K 也是内蕴的. 证毕.

注 (3.31)就是曲面的 Gauss 方程.

3.3.3 曲面论基本定理

由上述,沿曲面的活动幺正标架场有运动方程(3.14),其中第二式就是曲面的 Gauss 公式和 Weingarten 公式. 这时,结构方程是

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0$$

和

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3. \tag{3.32}$$

(3.32)的第一式是曲面的Gauss方程,后两式是曲面的Codazzi方程.

必须指出,曲面的法向量 e_3 也可选为它的反向 $-e_3$,这时第一基本形式保持不变,但第二基本形式要改变符号. 这相当于曲面关于切平面作一个**反射**. 我们把 $\mathbf{E}^3$ 中的运动和关于某平面的反射统称为**合同变换**. 显然,在合同变换下,距离及角度(绝对值)都保持不变.

根据定理 3.1,就得到用活动标架法语言表达的曲面论基本

定理.

定理3.4 已给六个双参数1形式$\{\omega^i(u^1,u^2),\omega_i^j(u^1,u^2)\}$，$\omega_i^j+\omega_j^i=0$，$\omega^3=0$. 如果它们满足结构方程，则存在双参数幺正标架场$\{x(u^1,u^2);e_i(u^1,u^2)\}$，使得它的无穷小运动分量就是这六个1形式. 活动标架的顶点轨迹是一个曲面，e_1和e_2与曲面相切，e_3是曲面的单位法向量. 而且这样的曲面确定到只差$\mathbf{E}^3$中的一个合同变换.

由(3.17)和(3.24)，不难看出，六个1形式$\{\omega^i,\omega_i^j\}$被第一和第二基本形式 Ⅰ 和 Ⅱ 确定到只差$\mathbf{E}^3$中的一个合同变换. 于是，根据定理1.1，就立即有下面的刚性定理.

定理3.5 设$M,\widetilde{M}$是$\mathbf{E}^3$中两个曲面，$f: M\to\widetilde{M}$是一可微映射. 设 Ⅰ，Ⅱ 和 $\widetilde{\text{Ⅰ}}$，$\widetilde{\text{Ⅱ}}$ 分别是M和$\widetilde{M}$在映射f下对应的第一和第二基本形式. 那么，当且仅当 Ⅰ $=\widetilde{\text{Ⅰ}}$，Ⅱ $=\pm\widetilde{\text{Ⅱ}}$ 时，f是一个合同变换.

证明 必要性是显然的. 下证充分性.

设M与$\widetilde{M}$在映射f对应下具有相同参数(u^1,u^2). 不失一般性，可假定(u^1,u^2)是M上的正交参数网. 由于 Ⅰ $=\widetilde{\text{Ⅰ}}$，故在f对应下，(u^1,u^2)也是$\widetilde{M}$上的正交参数网. 在M上选取双参数活动幺正标架场$\{x(u);e_i(u)\}$，使$e_\alpha(u)$是u_α曲线的单位切向量，$e_3(u)$是M的单位法向量场，满足$e_3=e_1\times e_2$. 对于$\widetilde{M}$以同样方式选取幺正标架场$\{\widetilde{x}(u);\widetilde{e}_i(u)\}$. 对应的1形式分别记为$\{\omega^i,\omega_i^j\}$和$\{\widetilde{\omega}^i,\widetilde{\omega}_i^j\}$. 这时，$\omega^\alpha$和$\widetilde{\omega}^\alpha$都与$\mathrm{d}u^\alpha$只差一个比例因子. 由于

$$(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=\text{Ⅰ}=\widetilde{\text{Ⅰ}}=(\widetilde{\omega}^1)^2+(\widetilde{\omega}^2)^2,$$

故ω^α与$\widetilde{\omega}^\alpha$最多差一个符号. 如有必要，我们可改变对应切向量为反向，总可以使(可能要改变$\widetilde{e}_3$的方向)

$$\omega^\alpha=\widetilde{\omega}^\alpha,\quad \omega^3=\widetilde{\omega}^3=0. \tag{3.33}$$

因为ω_1^2被ω^1和ω^2唯一确定，故又有

$$\omega_1^2 = \widetilde{\omega}_1^2. \tag{3.34}$$

此时若 $\mathrm{II} = -\widetilde{\mathrm{II}}$，我们运用一个反射把 $\widetilde{M}$ 变为 $\widetilde{M}^*$，配上 $\widetilde{M}$ 的一切标架的映像(左手系)，再通过改变法向量的方向使之成为右手系. 具有反定向的 $\widetilde{M}^*$ 的第二基本形式 $\widetilde{\mathrm{II}}^* = -\widetilde{\mathrm{II}} = \mathrm{II}$. 这表明，必要时可通过一个反射，我们总可以假定 $\mathrm{II} = \widetilde{\mathrm{II}}$，即

$$\begin{aligned} &b_{11}(\omega^1)^2 + 2b_{12}\omega^1\omega^2 + b_{22}(\omega^2)^2 \\ &= \tilde{b}_{11}(\widetilde{\omega}^1)^2 + 2\tilde{b}_{12}\widetilde{\omega}^1\widetilde{\omega}^2 + \tilde{b}_{22}(\widetilde{\omega}^2)^2. \end{aligned}$$

由于(3.33)，上式仅当

$$b_{11} = \tilde{b}_{11}, \quad b_{12} = \tilde{b}_{12}, \quad b_{22} = \tilde{b}_{22}$$

时才成立. 于是，

$$\omega_1^3 = \widetilde{\omega}_1^3, \quad \omega_2^3 = \widetilde{\omega}_2^3. \tag{3.35}$$

由(3.33)，(3.34) 和(3.35)，根据定理 1.1，两族幺正标架合同，即 M 与 $\widetilde{M}$ 在 f 下合同. 证毕.

习　题

1. 证明方程组(3.7) 等价于(3.8).

2. 验证面积元 $\omega^1 \wedge \omega^2$ 在变换(3.13) 下不变.

3. 验证(3.18) 式.

4. 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I} = E(\mathrm{d}u^1)^2 + 2F\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + G(\mathrm{d}u^2)^2$. 令 $\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u^1 + \dfrac{F}{\sqrt{E}}\mathrm{d}u^2$，$\omega^2 = \dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\mathrm{d}u^2$，试证：$\mathrm{I} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$.

5. 设曲面第一基本形式是

$$\mathrm{I} = [f(u) + g(v)](\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

计算对应的 ω^1, ω^2 和 ω_1^2，并计算 K.

6. 设曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}(u - v^2)^{-1}[\mathrm{d}u^2 - 4v\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 4u\mathrm{d}v^2], \quad (u > v^2).$$

计算对应的 $\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$ 和 Gauss 曲率 K.

7. 用活动标架法计算下列第一基本形式的 Gauss 曲率:

(1) $\mathrm{I} = \dfrac{4(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)}{[1 - (u^2 + v^2)]^2}$; (2) $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}{v^2}$.

8. 设 (u^1,u^2) 是曲面 M 上的曲率线网,其第一基本形式为 $\mathrm{I} = E(\mathrm{d}u^1)^2 + G(\mathrm{d}u^2)^2$. 设 k_1 和 k_2 是曲面的主曲率函数,试用 E,G,k_1,k_2 来表示 $\omega^1,\omega^2,\omega_1^2,\omega_1^3,\omega_2^3$.

第二章　曲线的整体微分几何

曲线整体微分几何主要论涉闭曲线的整体几何性质，它以曲线的局部理论为基础.

$\mathbf{E}^3$(或$\mathbf{E}^2$)中的一条(可微)曲线$C: x = x(t)$可定义为可微映射$x: [0,l] \to \mathbf{E}^3$(或$\mathbf{E}^2$)，这里闭区间$[0,l]$上的可微函数是指某个包含$[0,l]$的开区间上的可微函数在$[0,l]$上的限制. 如果有

$$x(0) = x(l), \quad x'(0) = x'(l), \quad x''(0) = x''(l), \quad \cdots,$$

其中一撇"$'$"表示关于t求导，则称C为(可微)**闭曲线**. 显然这时$x(t)$是周期函数. 如果$x(t)$在一个周期内是$1-1$的，即曲线无自相交点，则C称为**简单闭曲线**. 例如平面$\mathbf{E}^2$上的椭圆：$x=\{a\cos t, b\sin t\}$(a,b为正实数)，可看成映射$x: [0,2k\pi] \to \mathbf{E}^2$($k$为自然数)，它在一个周期$[0,2\pi)$内是$1-1$的，因此是简单闭曲线. 再如曲线$x = \{a\cos t, b\sin 2t\}$，也可看成映射$x: [0,2k\pi] \to \mathbf{E}^2$. 但它在一个周期$[0,2\pi)$内不是$1-1$的，因为$t = \dfrac{\pi}{2}$和$t = \dfrac{3\pi}{2}$都对应着曲线上的点$(0,0)$，因此不是简单闭曲线(见图 Ⅱ-1).

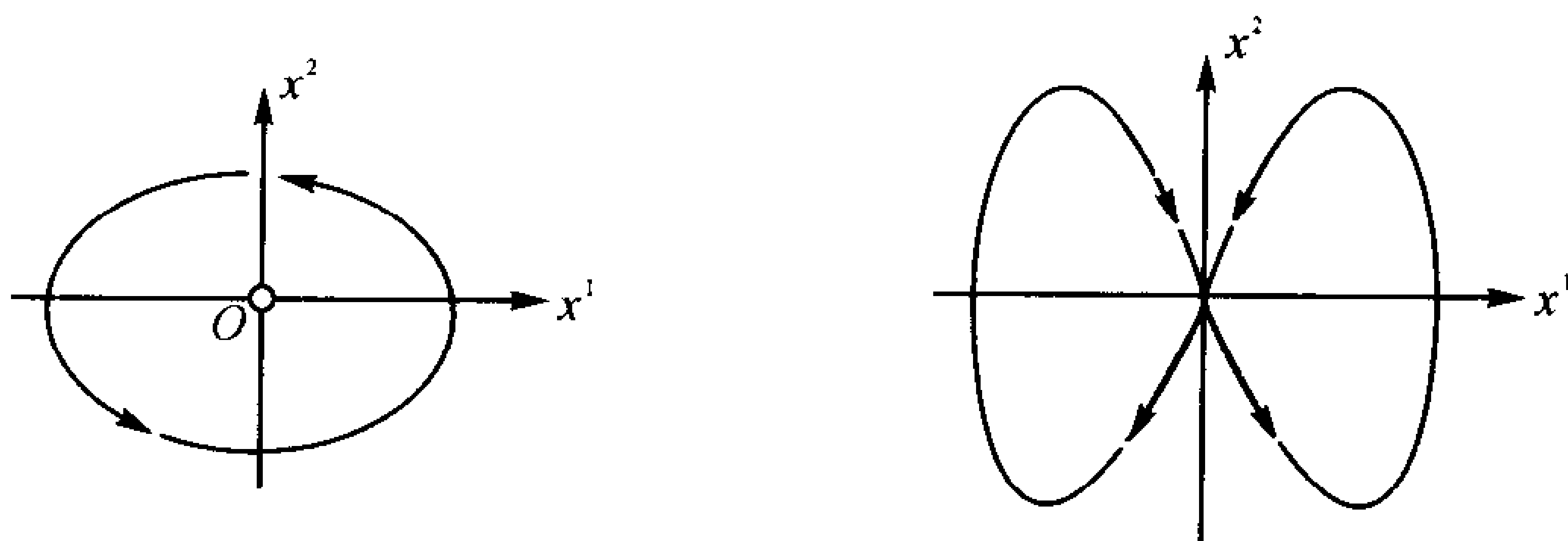


图 Ⅱ-1

§1 平面曲线的某些整体性质

1.1 等周不等式

平面闭曲线的最重要整体性质之一恐怕要算下面的Jordan定理.

定理 1.1(Jordan 曲线定理) 设 C 是平面 $\mathbf{E}^2$ 上的简单闭曲线,则 $\mathbf{E}^2\backslash C$ 恰有两个连通分支,它们以 C 为公共边界.

这个非常直观的事实,其数学证明却要用到不少拓扑学知识.这里我们不作介绍,有兴趣的读者可参考文献[3]§5-7.由此产生的一个几何问题是,平面 $\mathbf{E}^2$ 上具有等周长的一切简单闭曲线中,哪种曲线所围的区域面积最大?这个古老的等周问题,希腊人早已知道答案是圆.但其严格的数学证明直到1870年才由K. Weierstrass用变分法给出.以后人们又找到不少更好的证明方法.这里择其中两种较简单方法作一介绍.

定理 1.2(等周不等式) 设 C 是长度为 L 的平面简单闭曲线,A 是 C 所围有限区域的面积,则

$$L^2 \geqslant 4\pi A, \tag{1.1}$$

等号当且仅当 C 为圆周时成立.

证明 I (Hurwitz,A.,1902)

这个证法基于下面的 Wirtinger 引理.

引理 1.3(Wirtinger 引理) 设 $f(t)$ 是周期为 2π 的连续周期函数,它的导数 $f'(t)$ 也连续.若 $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$,则

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{2\pi}[f(t)]^2\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

等号当且仅当

$$f(t) = a\cos t + b\sin t \tag{1.3}$$

时成立,这里 a,b 为常数.

证明　把 $f(t)$ 展开成 Fourier 级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

由假设条件，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=0,$$

因为 $f'(t)$ 连续，故

$$f'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k(b_k\cos kt-a_k\sin kt).$$

对 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 应用 Parseval 公式，得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2).$$

两式相减得

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\pi\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-1)(a_k^2+b_k^2),$$

式中等号当且仅当 $a_k=b_k=0(k\geqslant 2)$ 时成立，即

$$f(t)=a_1\cos t+b_1\sin t.$$

引理证毕.

现在证明等周不等式. 在 $\mathbf{E}^2$ 上取直角坐标系 Ox^1x^2，使 x^2 轴过 C 的重心. 设 C 的坐标为 $\{x^1(s),x^2(s)\}$，其中 s 为弧长参数，$s\in[0,L]$. 作参数变换 $s=\frac{L}{2\pi}t$，则 $t\in[0,2\pi]$. 由于 C 的重心在 x^2 轴上，故

$$\int_0^{2\pi}x^1(t)\mathrm{d}t=0.$$

注意到 $(x^1)'^2+(x^2)'^2=((\dot{x}^1)^2+(\dot{x}^2)^2)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{L^2}{4\pi^2}$，这里“$'$”表示关于 t 求导，“$\cdot$”表示关于 s 求导. 因此，

$$\frac{L^2}{2\pi}=\int_0^{2\pi}((x^1)'^2+(x^2)'^2)\mathrm{d}t.$$

又由 Green 公式

$$A=\int_0^L x^1\dot{x}^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}x^1(x^2)'\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}2\left(\frac{L^2}{4\pi}-A\right)&=\int_0^{2\pi}((x^1)'^2+(x^2)'^2-2x^1(x^2)')\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}((x^1)'^2-(x^1)^2)\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(x^1-(x^2)')^2\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_0^{2\pi}((x^1)'^2-(x^1)^2)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对函数 $x^1(t)$ 应用 Wirtinger 引理，上式右边非负，故得

$$\frac{L^2}{4\pi}-A\geqslant 0,$$

式中等号当且仅当 $x^1(t)=a\cos t+b\sin t$ 且 $(x^2)'=x^1$ 时成立. 因而有 $x^2(t)=a\sin t-b\cos t+c$，c 为积分常数. 所以

$$(x^1)^2+(x^2-c)^2=a^2+b^2,$$

即 C 为一圆周. 证毕.

证明 Ⅱ (Schmidt,E.,1939)

由于 C 围成有限区域，我们可把区域夹在两平行直线 l_1 和 l_2 之间，使 C 与 l_1,l_2 分别相切. 再作一圆 $\bar{C}$ 与 l_1,l_2 相切，而不与 C 相交(见图 Ⅱ-2). 设 $\bar{C}$ 的半径为 r. 取 $\bar{C}$ 的圆心为原点 O，x^2 轴平行于 l_1，l_2. 设 $C:\{x^1(s),x^2(s)\}$ 使 C 的定

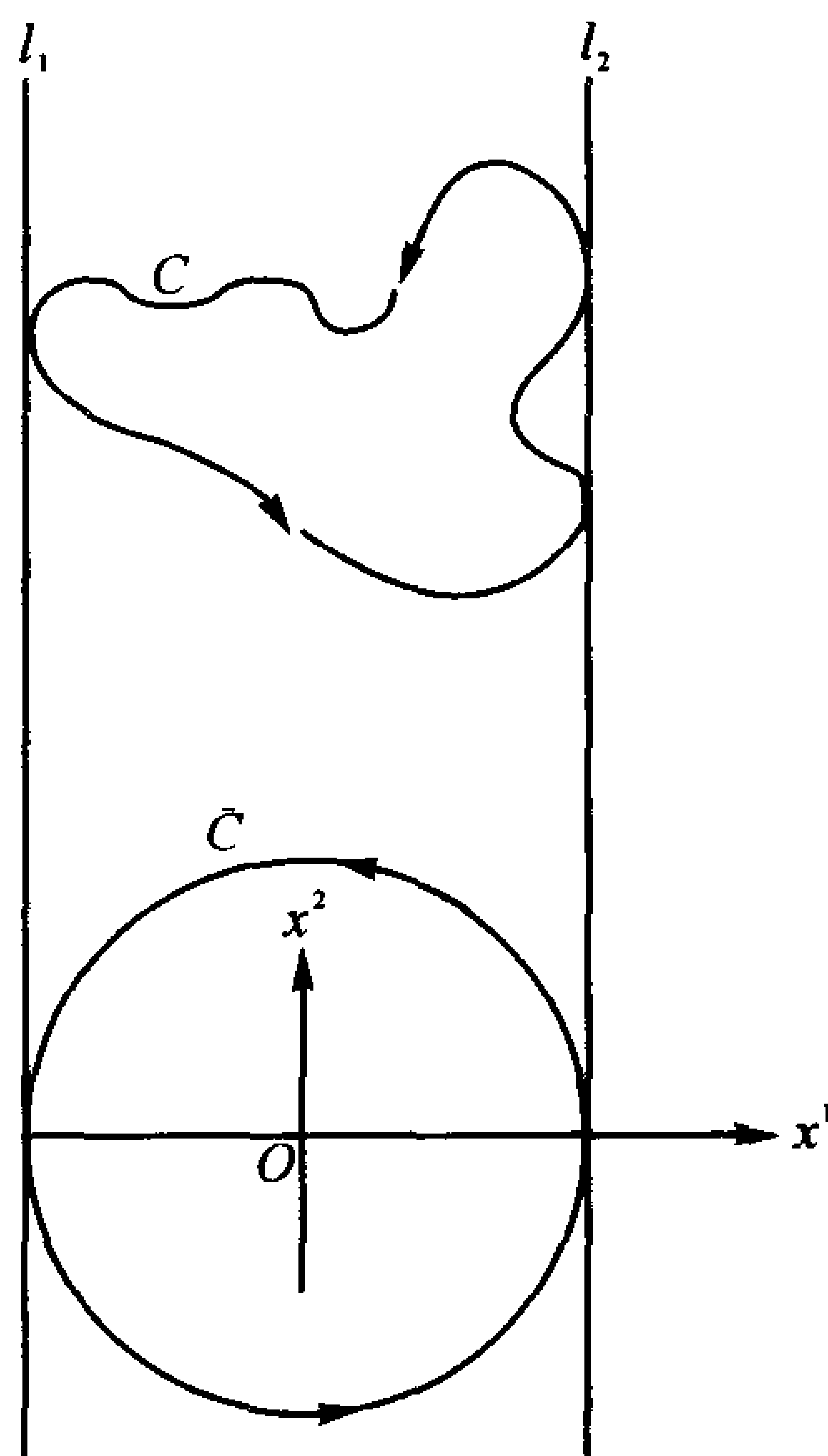


图 Ⅱ-2

向为正，$s \in [0,L]$ 为弧长参数.

设圆 $\bar{C}$ 的方程为$\{\bar{x}^1(s),\bar{x}^2(s)\} = \{x^1(s),\bar{x}^2(s)\}$，其面积为

$$\pi r^2 = -\int_0^L (\bar{x}^2 \dot{x}^1)\mathrm{d}s.$$

C 所围区域的面积 A 为

$$A = \int_0^L (x^1 \dot{x}^2)\mathrm{d}s.$$

对平面上向量$(\dot{x}^1,\dot{x}^2)$ 和$(-\bar{x}^2,x^1)$ 的内积应用 Cauchy 不等式

$$|x^1\dot{x}^2 - \bar{x}^2\dot{x}^1| \leqslant \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2}\sqrt{(x^1)^2 + (\bar{x}^2)^2}.$$

注意到$(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 = 1$ 和$(x^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 = r^2$，就有

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L (x^1\dot{x}^2 - \bar{x}^2\dot{x}^1)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^L |x^1\dot{x}^2 - \bar{x}^2\dot{x}^1|\mathrm{d}s \\ &\leqslant r\int_0^L \mathrm{d}s = rL. \end{aligned}$$

利用两正数的不等式：$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$，便得

$$\sqrt{A \cdot \pi r^2} \leqslant \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leqslant \frac{1}{2}rL,$$

即得(1.1). 当上式等号成立时，上面推导过程中的不等号均应取等号. 因此 $A = \pi r^2, L = 2\pi r$. 当 Cauchy 不等式为等式时，两向量必线性相关，即存在数 c 使$(-\bar{x}^2,x^1) = c(\dot{x}^1,\dot{x}^2)$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^1} = \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1} = -\frac{x^1}{\bar{x}^2} = \pm\frac{x^1}{\sqrt{r^2 - (x^1)^2}}.$$

两边积分得

$$x^2 = \pm\sqrt{r^2 - (x^1)^2} + c_1 (c_1 \text{ 为积分常数}).$$

因此

$$(x^1)^2 + (x^2 - c_1)^2 = r^2,$$

即 C 是一圆周. 证毕.

注　等周不等式对逐段光滑的简单闭曲线也成立，限于篇

幅，这里不再赘述.

1.2 曲线的旋转指标

设 C 是平面 $\mathbf{E}^2$ 上的可微闭曲线 $x:[0,l]\to\mathbf{E}^2$. 若把 C 上每点的单位切向量 $T(t)=x'(t)/|x'(t)|$ 的起点平移到坐标原点 O，则 T 的端点就落在单位圆周 $S^1=\{(x^1,x^2)\in\mathbf{E}^2\mid(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$ 上. 这样得到的映射 $\varphi:[0,l]\to S^1$ 称为 C 的切映射. 这种到 S^1 的连续映射有一个非常重要的拓扑不变量，称为映射的度数. 我们现在来介绍它.

1.2.1 映射的度数

$\mathbf{E}^2$ 中的一条回路(loop)是一个连续映射 $\sigma:[0,l]\to\mathbf{E}^2$，使得 $\sigma(0)=\sigma(l)$. 点 $x_0=\sigma(0)$ 称为回路 σ 的基点. 考虑有相同基点的两条回路 $\sigma_0,\sigma_1:[0,l]\to\mathbf{E}^2$，如果存在一连续映射 $h:[0,l]\times[0,1]\to\mathbf{E}^2$，使得

(Ⅰ) $h(t,0)=\sigma_0(t),\quad h(t,1)=\sigma_1(t),\quad t\in[0,l]$；

(Ⅱ) $h(0,s)=h(l,s)=x_0,\quad s\in[0,1]$，

则称回路 σ_0 与 σ_1 是同伦的，映射 h 称为 σ_0 与 σ_1 的同伦映射. 这就是说，存在一族有相同基点的回路 $h_s(t)=h(t,s)$，使得当 s 从 0 变到 1 时，h_s 把 $h_0=\sigma_0$ 连续变到 $h_1=\sigma_1$. 如图 Ⅱ-3 所示.

现设 $\sigma:[0,l]\to\mathbf{E}^2$ 是一条回路，若恒有 $|\sigma(t)|\neq 0$，即原点 O 不在回路 $\sigma(t)$ 上，则利用单位化映射 $\rho:\sigma(t)\mapsto\dfrac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|}$，可得复合映射 $\varphi=\rho\circ\sigma:[0,l]\to S^1\subset\mathbf{E}^2$，即 $\varphi(t)=\rho(\sigma(t))$. 显然 $\varphi(0)=\varphi(l)$. 以下我们着重讨论这种到 S^1 的回路.

令映射 $\eta:\mathbf{R}\to S^1$ 为

$$\eta(\theta)=\{\cos\theta,\sin\theta\}\in S^1,\quad \forall\theta\in\mathbf{R}. \tag{1.4}$$

引理 1.4 对于任何回路 $\varphi:[0,l]\to S^1$，存在连续函数 $\theta:[0,l]\to\mathbf{R}$，使得 $\eta\circ\theta=\varphi$，即对于 $t\in[0,l]$，$\varphi(t)=\eta(\theta(t))$.

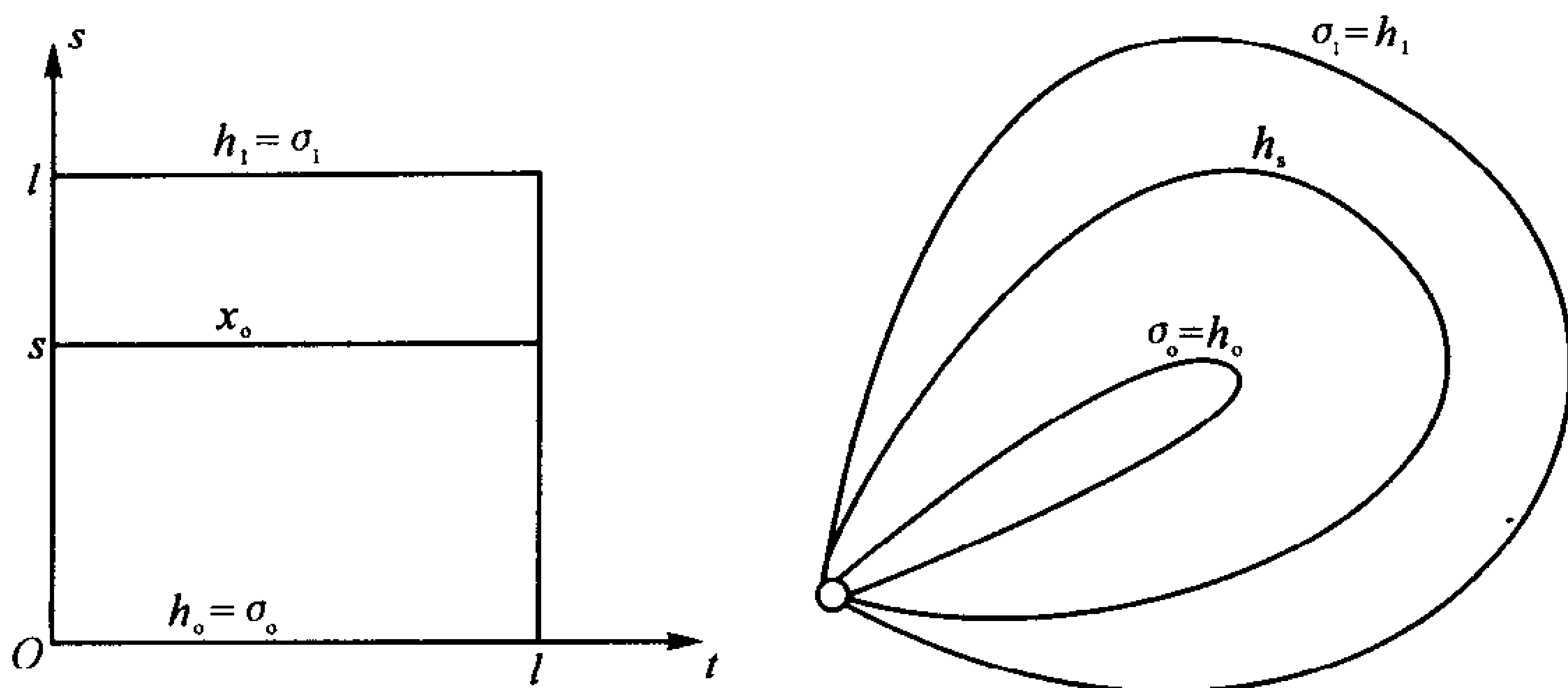


图 Ⅱ-3

而且,若 θ 与 $\bar{\theta}$ 是两个这样的函数,则

$$\theta - \bar{\theta} \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

证明 第一步(局部存在性) 对于任何 $t \in [0,l]$,存在连通的开区间 $I_t \subset [0,l]$,使得 $\varphi(I_t)$ 是 S^1 上的连续开子集. 注意,若 $t = 0$,则 I_0 是形如$[0,\varepsilon)$的区间. 同样,I_l 是形如$(\varepsilon,l]$的区间. 于是,根据映射 η 的定义(1.4),可见 $\eta^{-1}(\varphi(I_t))$ 是 $\mathbf{R}$ 上无限多不相交的连通开区间之并,而且当 η 限制在这些区间中的任一个上时,η 是该区间到 $\varphi(I_t)$ 上的同胚,如图 Ⅱ-4 所示.

因此,如果我们选择数 $\theta_t \in \mathbf{R}$ 使得 $\eta(\theta_t) = \varphi(t)$,则函数 θ 在 I_t 上可这样地被唯一确定:令 $\theta = \eta^{-1} \circ \varphi$ 使得 $\theta(t) = \theta_t = \eta^{-1}(\varphi(t))$. 于是,在 I_t 上 $\eta \circ \theta = \varphi$.

第二步(唯一性) 我们只要证明,若 $\theta(0) = \bar{\theta}(0) + 2k\pi$,其中 k 为某整数,则在整个$[0,l]$上,$\theta = \bar{\theta} + 2k\pi$. 为此,我们令

$$A = \{t \in [0,l] \mid \theta(t) = \bar{\theta}(t) + 2k\pi\}.$$

显然,A 是闭的. 另一方面,从第一步的证明可见,A 又是开的. 既然 $0 \in A$ 且$[0,l]$是连通的,所以 $A = [0,l]$. 此即所求证.

第三步(整体存在性) 考虑集合

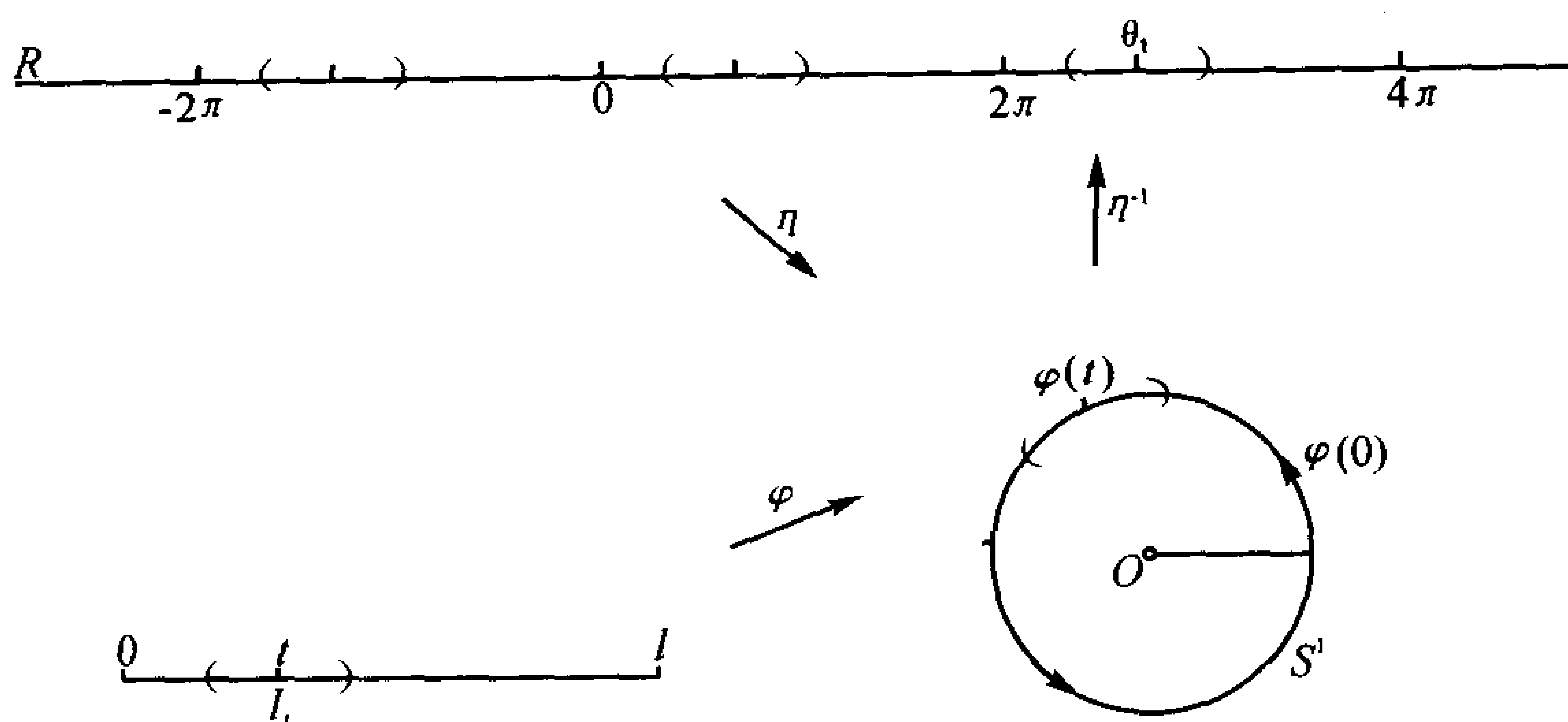


图 Ⅱ-4

$$B = \{t \in [0,l] \mid 在[0,t]上可定义\,\theta\,使\,\eta \circ \theta = \varphi\}.$$

由第一步，B 非空. 设 B 的上界值为 t_0. 由第一步，存在区间 I_{t_0} 和定义在 I_{t_0} 上的函数 $\bar{\theta}$ 使 $\eta \circ \bar{\theta} = \varphi$. 在 I_{t_0} 中取 $t_1 < t_0$，则 $t_1 \in B$. 因此，$\bar{\theta}(t_1) = \theta(t_1) + 2k\pi$， k 为某整数. 由第二步的唯一性，在整个$[t_1, t_0]$ 上有 $\bar{\theta} = \theta + 2k\pi$. 这样，我们在$[0, t_0]$ 上可用函数 θ 替换 $\bar{\theta}$，从而 $t_0 \in B$. 而且，若 $t_0 < l$，则可把 θ 延拓到$[0, t_0] \cup I_{t_0} \subset B$. 但这与 t_0 为 B 的上界值矛盾. 所以 $t_0 = l$. 引理 1.4 证毕.

据此引理，由于 $\varphi(0) = \varphi(l)$，故 $\theta(l) - \theta(0)$ 必是 2π 的整数倍. 而且，对于另一这样的函数 $\bar{\theta}$ 来说，这个整数不变. 因此我们可作下述定义.

定义　对于任一回路 $\varphi: [0,l] \to S^1$，设连续函数 $\theta: [0,l] \to \mathbf{R}$ 如引理 1.4 所述. 整数$[\theta(l) - \theta(0)]/2\pi$ 称为映射 φ 的**度数**，记为 $\deg \varphi$，即

$$\deg \varphi = \frac{1}{2\pi}[\theta(l) - \theta(0)]. \tag{1.5}$$

直观上，$\deg \varphi$ 就是当 t 从 0 变到 l 时 $\varphi(t)$ 在 S^1 上围绕的圈数.

deg φ 可正可负. 例如,若以图 Ⅱ-5 中逆时针方向为正,则当 $\varphi(t)$ 顺时针转时,deg φ 就为负.

注意,到 S^1 上的两条回路可以不妨认为它们有相同的基点. 否则可把其中一条回路沿 S^1 作一移动. 以下若无特殊说明,均按此理解.

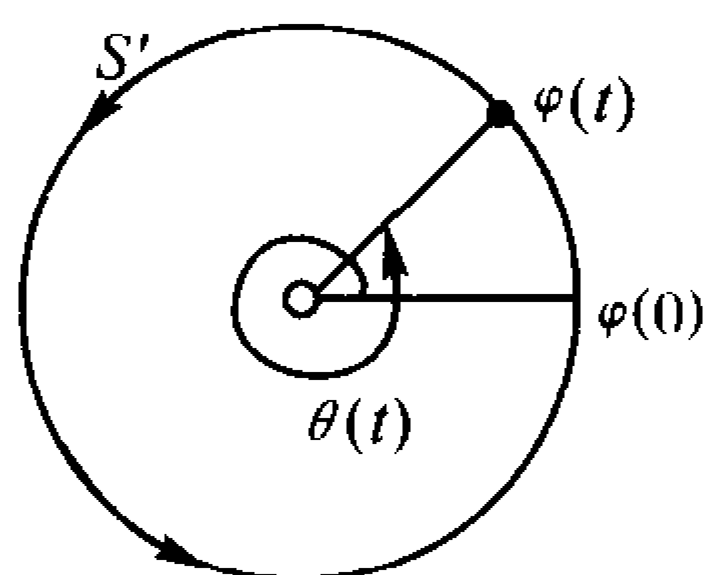


图 Ⅱ-5

定义 设 $\varphi_0,\varphi_1:[0,l]\to S^1\subset\mathbf{E}^2$ 是到 S^1 的两条回路. 若存在正数 $\varepsilon<1$,使得关于 $\mathbf{E}^2$ 的度量有

$$\sup_{t\in[0,l]}|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\leqslant\varepsilon<1, \tag{1.6}$$

则称 φ_0 与 φ_1 是邻近的.

引理 1.5 任何两条到 S^1 的相邻近回路有相同的映射度数.

证明 设 $\varphi_0,\varphi_1:[0,l]\to S^1$ 是两邻近回路,从而对一切 $t\in[0,l]$ 有(1.6). 现用反证法,假定 deg $\varphi_0\neq$ deg φ_1,那么,存在非零整数 k 使

$$\deg\varphi_1=\deg\varphi_0+k.$$

这表明 $\varphi_1(t)$ 比 $\varphi_0(t)$ 在 S^1 上(正或反向)多绕 k 圈. 形象地说,好像有两位运动员在相同的时间 l 内在 S^1 上跑,φ_1 运动员比 φ_0 运动员(正或反向)多跑 k 圈. 于是,必有某时刻 $t^*\in[0,l]$ 使 φ_1 运动员与 φ_0 运动员分别位于 S^1 的对径点上. 因此,存在某个 $t^*\in[0,l]$,使 $\varphi_1(t^*)$ 和 $\varphi_0(t^*)$ 分别位于 S^1 对径点上,即

$$|\varphi_1(t^*)-\varphi_0(t^*)|=2.$$

这与(1.6)矛盾. 引理 1.5 证毕.

定理 1.6 两条同伦的到 S^1 的回路必有相同的映射度数.

证明 设回路 $\varphi_0,\varphi_1:[0,l]\to S^1$ 是同伦的. 由同伦的定义,存在同伦映射 $h:[0,l]\times[0,1]\to S^1$,使得 $h_s(t)=h(t,s)$ 是闭区

域$[0,l]\times[0,1]$上的连续函数，因而是一致连续的. 这里$h_0=\varphi_0$，$h_1=\varphi_1$. 于是，对于任何$0<\varepsilon<1$，存在$\delta>0$，只要$|s_1-s_2|<\delta$，$|t_1-t_2|<\delta$，就有$|h_{s_1}(t_1)-h_{s_2}(t_2)|\leqslant\varepsilon<1$；特别是

$$|h_{s_1}(t)-h_{s_2}(t)|\leqslant\varepsilon<1,\quad \forall t\in[0,l].$$

这表明，可以通过一族相邻近的回路来实现从φ_0到φ_1的变换. 根据引理1.5，$h_{s_1}(t)$与$h_{s_2}(t)$有相同的映射度数，只要$|s_1-s_2|<\delta$. 因此，有限次应用引理1.5便得$\deg\varphi_0=\deg\varphi_1$. 证毕.

注 定理1.6表明，回路$\varphi:[0,l]\to S^1$的映射度数是一个同伦不变量. 这在几何与拓扑中有许多应用，因而是十分重要的. 这里我们仅给出一个初等的简单证明，进一步的讨论可参考文献[3].

如果回路$\varphi:[0,l]\to S^1$是可微的，注意到(1.4)定义的η是可微的，则由引理1.4定义的函数θ也是可微的. 现设$\varphi(t)=\{x^1(t),x^2(t)\}\in S^1$. 根据引理1.4，函数$\theta(t)$可表示为

$$\begin{aligned}\theta(t)&=\theta(0)+\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right)\mathrm{d}t\\&=\theta(0)+\int_0^t(x^1(x^2)'-x^2(x^1)')\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中$\theta(0)$由$\operatorname{arctg}\dfrac{x^2(0)}{x^1(0)}$决定. 于是

$$\deg\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^l(x^1(x^2)'-x^2(x^1)')\mathrm{d}t.\tag{1.7}$$

1.2.2 旋转指标定理

回到本小节的开头，$\mathbf{E}^2$中可微闭曲线C的切映射便是到S^1的回路.

定义(曲线的旋转指标) 设$x:[0,l]\to\mathbf{E}^2$是平面闭曲线C，并设$\varphi:[0,l]\to S^1$为C的切映射. 那么，φ的映射度数$\deg\varphi$称为C的**旋转指标**，记作$i_r(C)$.

曲线旋转指标的几何解释如下. 根据引理1.4，曲线C的切向量T可写成

$$T(t) = \{\cos\theta(t), \sin\theta(t)\}.$$

令 $L = \int_0^l \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t$ (C 的长度)，用 s 表示 C 的弧长参数. 设 k_r 和 $N_r = \{-\sin\theta, \cos\theta\}$ 分别是 C 的相对曲率和相对法向量. 由平面曲线的相对 Frenet 公式

$$k_r N_r = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = T' \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = N_r \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

即

$$k_r = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

因此

$$\int_0^L k_r \mathrm{d}t = \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}s = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi i_r(C). \qquad (1.8)$$

积分 $\int_0^L k_r \mathrm{d}s$ 称为 C 的**相对全曲率**. (1.8) 说明，平面闭曲线的相对全曲率等于 C 的旋转指标的 2π 倍.

例 设 C 是 $\mathbf{E}^2$ 中的椭圆 $x(t) = \{a\cos t, b\sin t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 设 s 是 C 的弧长参数，则

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right| = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}.$$

C 的切向量是

$$T(t) = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-1/2}\{-a\sin t, b\cos t\}.$$

于是，由相对 Frenet 公式，不难算得 C 的相对曲率

$$k_r = ab(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-3/2}.$$

因此，相对全曲率为

$$\int_0^L k_r \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(k_r \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\pi/2} (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-1} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

可见它的旋转指标 $i_r = 1$.

也可根据(1.7) 先算 $i_r(C)$. 事实上，由 $\varphi(t) = T(t)$，易见

$$x_1(t) = -a\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-1/2},$$

$$x_2(t) = b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-1/2}.$$

于是由(1.7)不难算得 $i_r(C) = \deg\varphi = 1$. 因此,$\int_0^L k_r \mathrm{d}s = 2\pi$.

下列图 Ⅱ-6 给出了旋转指标为 0,1,2 的闭曲线;改变图中曲线的定向,旋转指标就为 0, -1, -2.

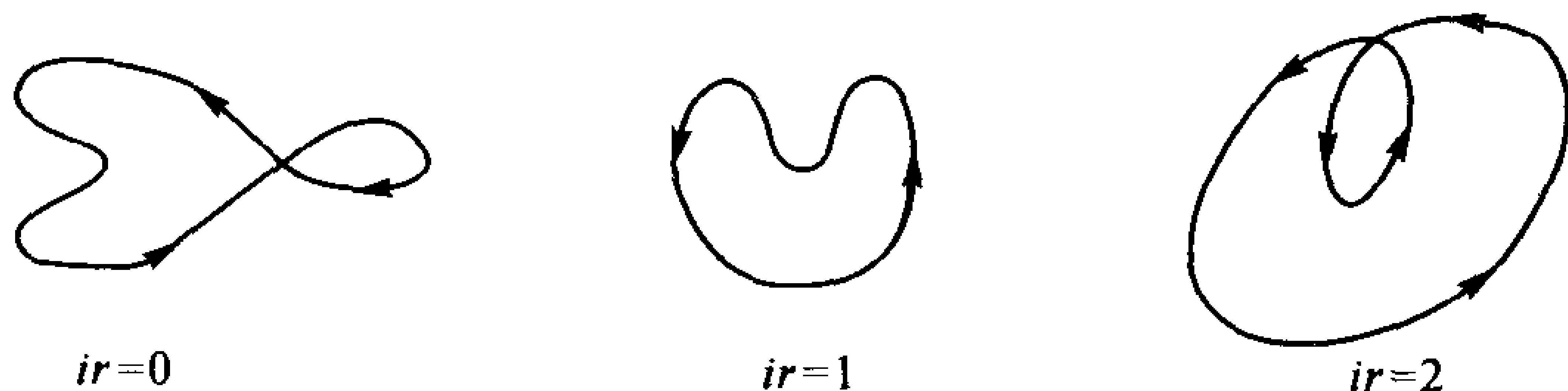


图 Ⅱ-6

定理 1.7(曲线旋转指标定理) 平面上简单闭曲线 C 的旋转指标 $i_r(C) = \pm 1$.

证明 在 $\mathbf{E}^2$ 上取一条与曲线 C 不相交的直线,平行移动它直至与 C 相切,记这时的直线为 u,与 C 之切点为 x_0. 显然,C 落在 u 的一侧(见图 Ⅱ-7). 选取曲线 C 的新参数表示 $x:[0,l]\to\mathbf{E}^2$,使得 $x(0) = x_0$. 现取三角形区域

$$\triangle = \{(t,s)\in[0,l]\times[0,l];0\leqslant t\leqslant s\leqslant l\}.$$

定义"割线映射"$\varphi:\triangle\to S^1$ 为

$$\varphi(t,s) = \frac{x(s)-x(t)}{|x(s)-x(t)|}, \forall t<s,(t,s)\in\triangle-\{(0,l)\},$$

$$\varphi(t,t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}, \quad \varphi(0,l) = -\frac{x'(0)}{|x'(0)|}.$$

因为 C 可微,故 φ 是连续的. 设 $A=(0,0)$,$B=(0,l)$,$C=(l,l)$ 是三角形 $\triangle$ 的顶点. 当 φ 限制在 AC 边上时,是曲线 C 的切映射,它的映射度数就是 C 的旋转指标. 根据图 Ⅱ-7,这个切映射与 φ 在其他两边 AB 和 BC 上的限制是同伦的. 这样,由定理 1.6,我们只

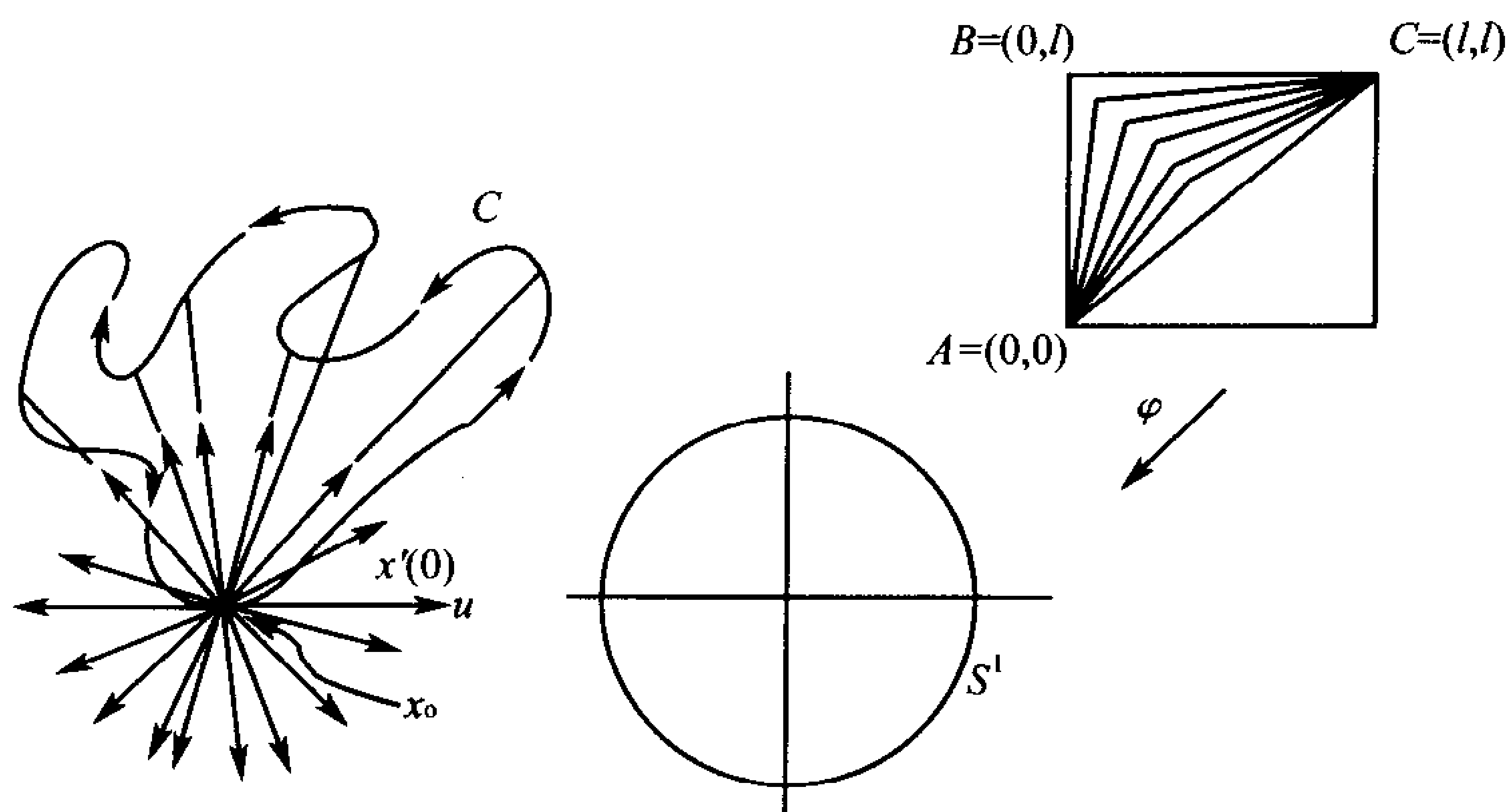


图 Ⅱ-7

要证明后一映射的度数是 ± 1.

假设$\mathbf{E}^2$和C的定向取得使$x'(0)$到$-x'(0)$的有向角为π. 这时,φ在AB上的限制按正方向围绕了半个S^1,而φ在BC上的限制也按正方向围绕了余下的半个S^1(图 Ⅱ-7). 因此,φ在AB和BC上的限制的度数是 + 1. 若把曲线定向反过来,这个度数便是 − 1. 定理 1.7 证毕.

推论 平面上简单闭曲线的相对全曲率为 $\pm 2\pi$.

注 定理 1.7 对逐段光滑的简单闭曲线也成立. 我们只要在每个角点(两段光滑弧的交点)附近作一个圆弧,使它切于这角点前后的两段光滑弧,从而得一条新的光滑的简单闭曲线. 然后令这些圆弧的半径趋向零,便得证明.

1.3 凸闭曲线

定义 设C是平面正则曲线,若它总是位于其上每点的切线的同一侧,则称C是凸的. 曲线C上使相对曲率k_r的微分$dk_r = 0$的点称为C的顶点.

定理 1.8 平面上简单闭曲线 C 为凸的充要条件是它的相对曲率不变号.

证明 设 s 为 C 的弧长参数,$\theta(s)$ 为引理 1.4 中所定义的函数. 由(1.8),$k_r(s)=\frac{d\theta}{ds}$. 因此,相对曲率 k_r 不变号等价于 $\theta(s)$ 为单调函数.

充分性. 用反证法. 若 θ 单调,而 C 非凸,则 C 上存在点 p 使 C 在 p 的切线 m 的两侧都有点(图 Ⅱ-8). 取 p 为坐标原点,m 为 x^1 轴,建立平面直角坐标系 px^1x^2. 由于 C 是闭的,C 上点的 x^2 坐标函数是连续的,故必存在点 $q_1,q_2\in C$ 使 x^2 坐标函数达到极大和极小(一正一负). 而且 C 在 q_1,q_2 处的切线 m_1,m_2 平行于 m(x^1 轴). 于是,

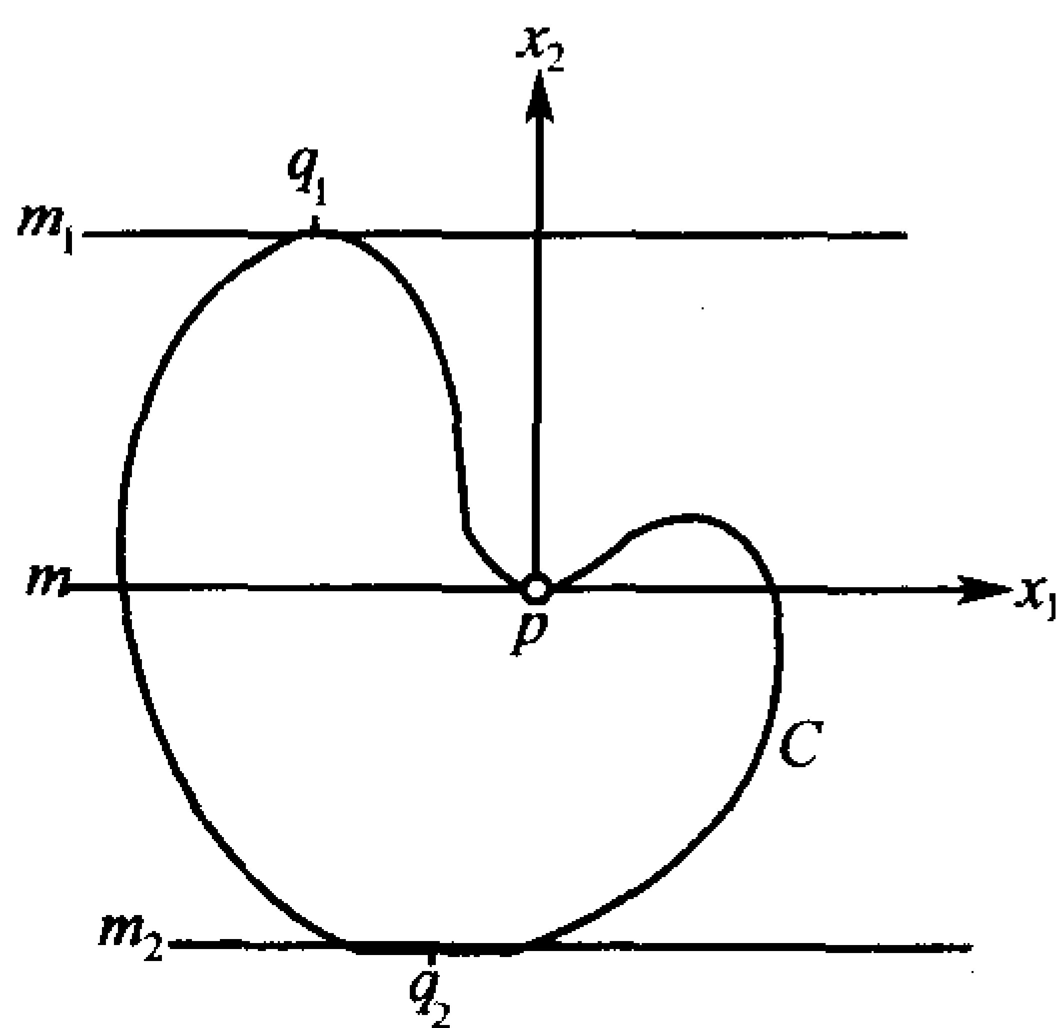


图 Ⅱ-8

p,q_1,q_2 三点中必有两点的切向量 $T(s)$ 相等. 设这两点对应的弧长参数为 s_1 和 s_2,$s_1<s_2$. 既然 $T(s_1)=T(s_2)$,则 $\theta(s_2)=\theta(s_1)+2k\pi$,$k$ 为整数. 由定理 1.7,θ 在$[0,l]$上的变化不超过 2π,即 $k=\pm 1$ 或 $k=0$,这里 l 是 C 的长度.

若 $k=0$,则由 θ 的单调性,可见 $\theta(s)=\text{const}$,$\forall s\in[s_1,s_2]$. 若 $k=\pm 1$,则同理可知 θ 在$[0,s_1]$和$[s_2,l]$上为常数. 不论哪种情况,在 s_1,s_2 所对应的 C 的两点之间,必有一段曲线是直线段,因而这两点的切线重合. 但 m,m_1,m_2 是三条不同切线,故得矛盾. 因此,C 必是凸的.

必要性. 设曲线是凸的. 仍用反证法. 假定 θ 不单调. 于是存在三点 $s_1<s_0<s_2$,使得 $\theta(s_1)=\theta(s_2)\neq\theta(s_0)$. 因为 C 是简单闭曲线,由

定理 1.7,它的切线像是一个单位圆周,所以必存在 s_3 使得 $T(s_3)=-T(s_1)=-T(s_2)$,即在 s_1,s_2,s_3 的对应点处,C 的切线相互平行. 若这三条切线互不重合,则中间一条切线的两侧各有 C 的点,这与 C 的凸性矛盾. 因此,三条切线中至少有两条重合,即C 上存在两点 p,q,它们的切线重合为直线 m. 若点 a 在线段 pq 上而不在C 上,过a 作直线 n 与 m 正交(见图 Ⅱ-9). n 不可能与C 相切,否则 p,q 两点分居于n 的两侧,从而与C 的凸性矛盾. 于是,n 与C 至少有两个交点,记为b,c,并设b 靠近a. 由于b 位于 $\triangle pqc$ 之中,故过 b 的任何直线都不能使三角形的三顶点 p,q,c 位于直线的同一侧. 这样,C 在b 的切线的两侧都有C 的点,与C 的凸性相矛盾. 所以,点 a 必在 C 上,即线段 pq 上的点都在 C 上,从而 p,q 处的切向量相等. 由此可见,p,q 对应的弧长参数必是s_1,s_2. 显然,对一切 $s\in[s_1,s_2]$,$\theta(s)=\theta(s_1)$. 但这与 $\theta(s_0)\neq\theta(s_1)$ 矛盾,$s_1<s_0<s_2$. 所以,θ 必为单调函数. 定理 1.8 证毕.

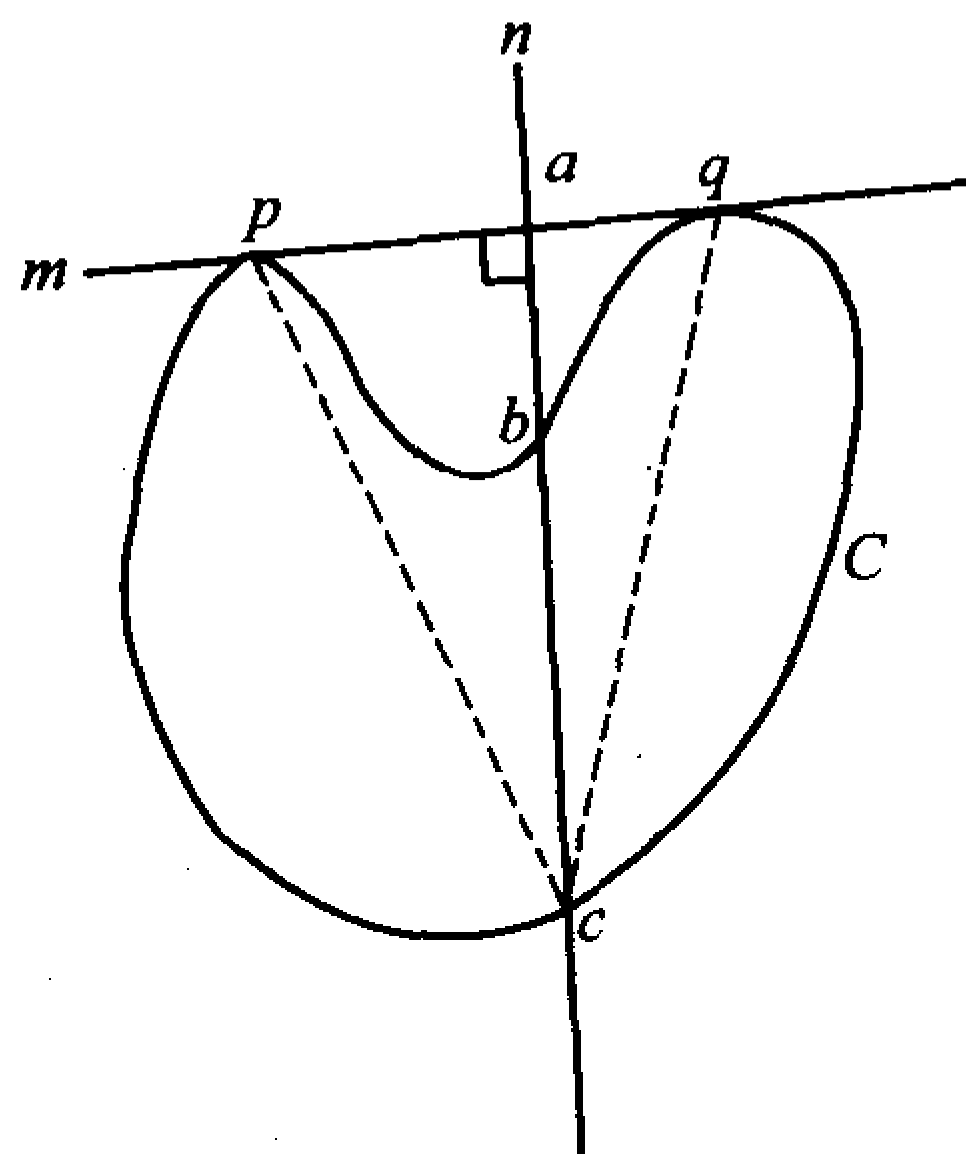


图 Ⅱ-9

注 由定理 1.8 的充分性证明可见,若平面闭曲线 C 的相对曲率不变号且 C 的旋转指标为 ± 1,则 C 必是凸的.

定理 1.9(四顶点定理) 平面上简单凸闭曲线至少有四个顶点.

证明 设C 是平面上简单凸闭曲线. 因为C 的相对曲率 $k_r(s)$ 是连续函数,这里 s 是弧长参数,故 $k_r(s)$ 在闭曲线 C 上有最大值和最小值的点. 设这两点为 p,q,从而 $\mathrm{d}k_r$ 在 p,q 处为零,即这是 C 上的两个顶点.

过 p 和 q 作直线 m，点 p,q 把 C 分成两段曲线 C_1 和 C_2. 可以断言，C_1 和 C_2 分别位于直线 m 的两侧，而且除 p,q 外 C_1 或 C_2 不再与 m 有交点. 因为否则的话，比如 C_1 与 m 另有一个交点 r（不同于 p,q），见图 Ⅱ-10. 由于凸性以及 p,q,r 是 C 上不同点，故中间点（比如说 p）的切线与 m 重合，而且由凸性推出 m 在 p,q,r 三点与 C 相切. 但是，另一方面，除非线段 $\overline{rq}$ 属于 C，否则 q 和 r 将落在邻近 p（中间点）的点的切线的两侧，从而与凸性矛盾. 因此，在 p,q 处 $k_r = 0$. 既然这些点是 k_r 的最大和最小值点，故在整个 C 上 $k_r = 0$，这是不可能的.

现选取坐标原点 O 在直线 m 上，设 m 的方程为 $nx = 0$，其中 x 是直线 m 上点的位置向量，n 是 m 的法向量. 直线 m 把平面分成两部分：

$\pi_1 : nx > 0$

$\pi_2 : nx < 0$.（图 Ⅱ-11）

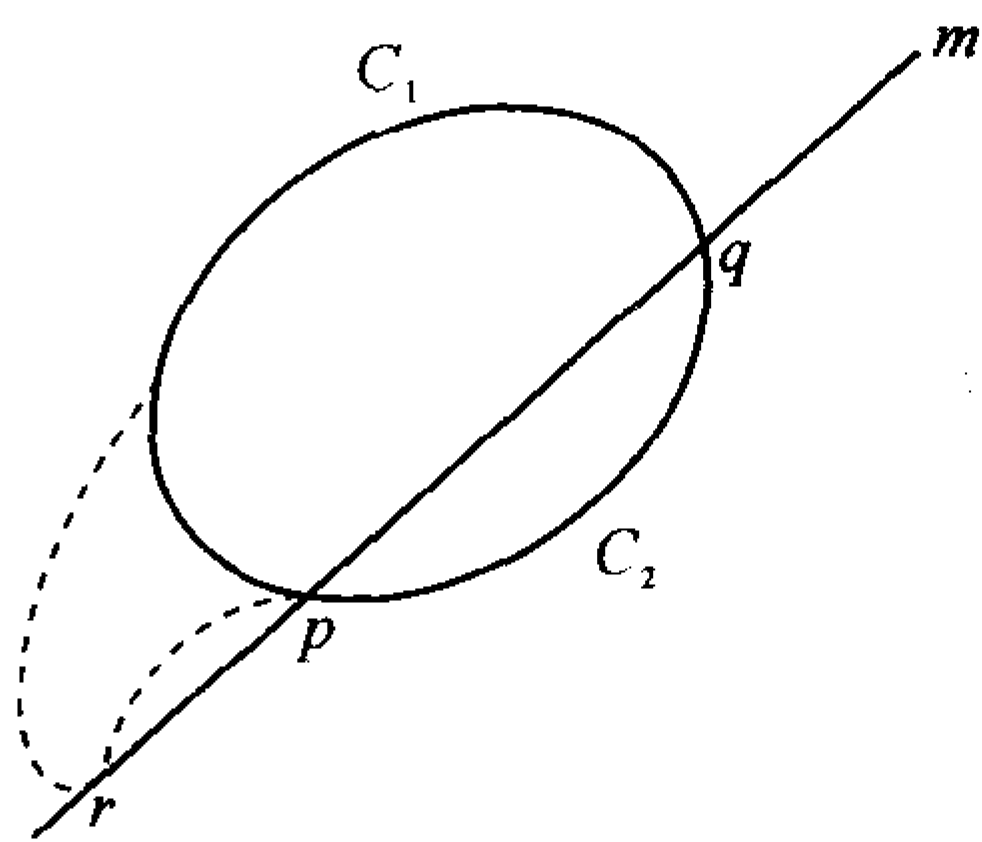


图 Ⅱ-10

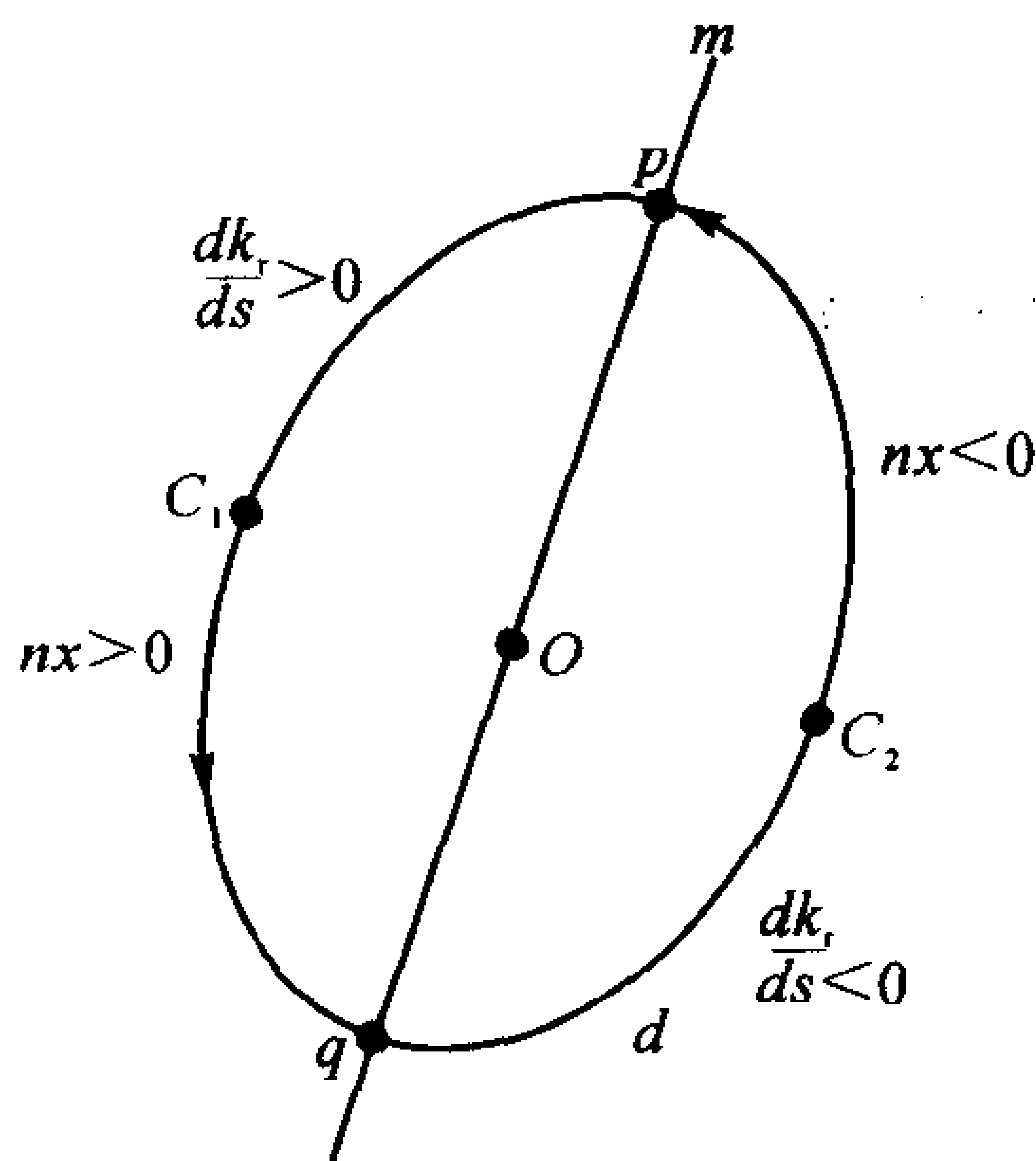


图 Ⅱ-11

如果在 C_1, C_2 上不再有顶点，则 $\mathrm{d}k_r(s)$ 在 C_1, C_2 上均不变号. 不妨设在 C_1 上 $\mathrm{d}k_r(s) > 0$，在 C_2 上 $\mathrm{d}k_r(s) < 0$. 于是，无论在 C_1 上

还是在 C_2 上均有

$$(nx)\frac{\mathrm{d}k_r}{\mathrm{d}s}>0.$$

沿曲线 C 积分，得

$$\begin{aligned}0&<\int_C(nx)\frac{\mathrm{d}k_r}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\int_C\mathrm{d}[(nx)k_r]-\int_C\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)k_r\mathrm{d}s\\&=-\int_C n\cdot(k_rT)\mathrm{d}s=\int_C n\cdot\frac{\mathrm{d}N_r}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\&=n\cdot(N_r(l)-N_r(0))=0,\end{aligned}$$

这里 l,T,N_r 分别是 C 的长度、切向量、相对法向量. 这就得到矛盾. 因此，C 上不可能只有两个顶点.

现设存在第三个顶点，它位于 C_1 或 C_2 上，比如在 C_1 上，则 $\mathrm{d}k_r(s)$ 在 C_1 上要改变符号. 由于 p 和 q 是最大值和最小值点，$\mathrm{d}k_r(s)$ 在 C_1 上要改变两次符号. 所以还存在第四个顶点. 定理证毕.

注 四顶点定理对平面简单闭曲线(不一定是凸的)也成立，但证明更困难. 可参考S. B. Jackson的文章(Bull. Amer. Math. Soc. 1944,50:564－578). 这个定理的结论不能再改进，因为平面上椭圆恰有四个顶点.

习　题

1. 是否存在这样的平面简单闭曲线，其长度为6公尺，所围区域的面积为3平方公尺?

2. 设平面简单闭曲线 C 的长度为 L，相对曲率 $k_r(s)$ 满足：$0\leqslant k_r(s)\leqslant\frac{1}{R}$，$R$ 为正常数. 试证：$L\geqslant 2\pi R$.

3. 设 $\overline{AB}$ 是直线段，$L>\overline{AB}$ 之长. 证明连接点 A,B 的长为 L 的简单曲线 C 与 $\overline{AB}$ 所围面积最大时，C 是过 A,B 的圆弧.

4. 设 θ 是引理 1.4 所描述的连续函数. 证明(1.5)定义的度数 $\deg\varphi$ 与 θ 的选择无关.

5. 在平面直角坐标系 Ox^1x^2 下给定曲线 C:

$$x^1(t) = \cos t,\quad x^2(t) = \sin 2t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

计算曲线 C 的旋转指标和相对全曲率.

6. 求平面上椭圆 $x(t) = (a\cos t, b\sin t)$ 的顶点坐标, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $0 < a < b$ 为常数.

7*. 设 $x: [0,l] \to \mathbf{E}^2$ 是平面闭曲线 C, 不在 C 上取一点 $x_0 \in \mathbf{E}^2$, 公式

$$\varphi(t) = \frac{x(t) - x_0}{|x(t) - x_0|},\quad \forall t \in [0,l]$$

定义了一个映射 $\varphi: [0,l] \to S^1$. φ 的映射度数称为曲线 C 关于点 x_0 的**环绕数**(Winding number). 设 $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$, 试证: 这个环绕数 w 可表示为

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^l (x^1(x^2)' - x^2(x^1)')\mathrm{d}t.$$

8*. 设 $C: x = x(s), s \in [0,l]$ 是 $\mathbf{E}^2$ 上简单闭曲线, 其相对法向量为 $N_r(s)$. 定义曲线 $\overline{C}$ 为

$$\overline{x}(s) = x(s) - aN_r(s),$$

a 为正常数. $\overline{C}$ 称为 C 的**平行曲线**. 设 $k_r, \overline{k}_r$ 和 $A, \overline{A}$ 分别为它们的相对曲率和它们所围的面积. 试证明:

(1) $\overline{C}$ 的长度 $=$ C 的长度 $+ 2a\pi$;

(2) $\overline{k}_r(s) = k_r(s)/(1+a)$;

(3) $\overline{A} = A + al + \pi a^2$.

§2 空间曲线的某些整体性质

在三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$ 中取直角坐标系 $Ox^1x^2x^3$. 设 $x: [0,l] \to$

$\mathbf{E}^3$ 是一条空间曲线 C,以弧长 $s \in [0,l]$ 为参数.若把它的单位切向量 $T(s) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ 的起点平移到原点 O,则它的端点就落在单位球面 $S^2 = \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbf{E}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$ 上.当 s 变动时,就得到 S^2 上的一条曲线 $T(s)$,$s \in [0,l]$,称为曲线 C 的切线像.切线像的全长为

$$K = \int_0^l \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right| \mathrm{d}s = \int_0^l k(s)\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

其中 $k(s)$ 是空间曲线 C 的曲率,它是非负函数.量 K 称为 C 的全曲率.为了研究它,有必要讨论球面上曲线的某些整体性质.

2.1 球面上的 Crofton 公式

设 S^2 是 $\mathbf{E}^3$ 中的标准单位球面.S^2 上一个有向大圆 S_W 所在(过球心 O)的平面的单位法向量记为 W,它与 S_W 的定向构成右手系(见图 Ⅱ-12).W 的末端点(位于 S^2 上)称为有向大圆 S_W 的极点.这样,S^2 上有向大圆与它的极点 1－1 对应.因此有向大圆的一个集合对应于极点的一个集合,它是 S^2 上的一个点集(区域).有向大圆的测度就可定义为它的极点集的面积.显然,这样定义的测度在 S^2 的运动下不变.注意,相重的有向大圆所对应的极点在计算面积时应重复计算.

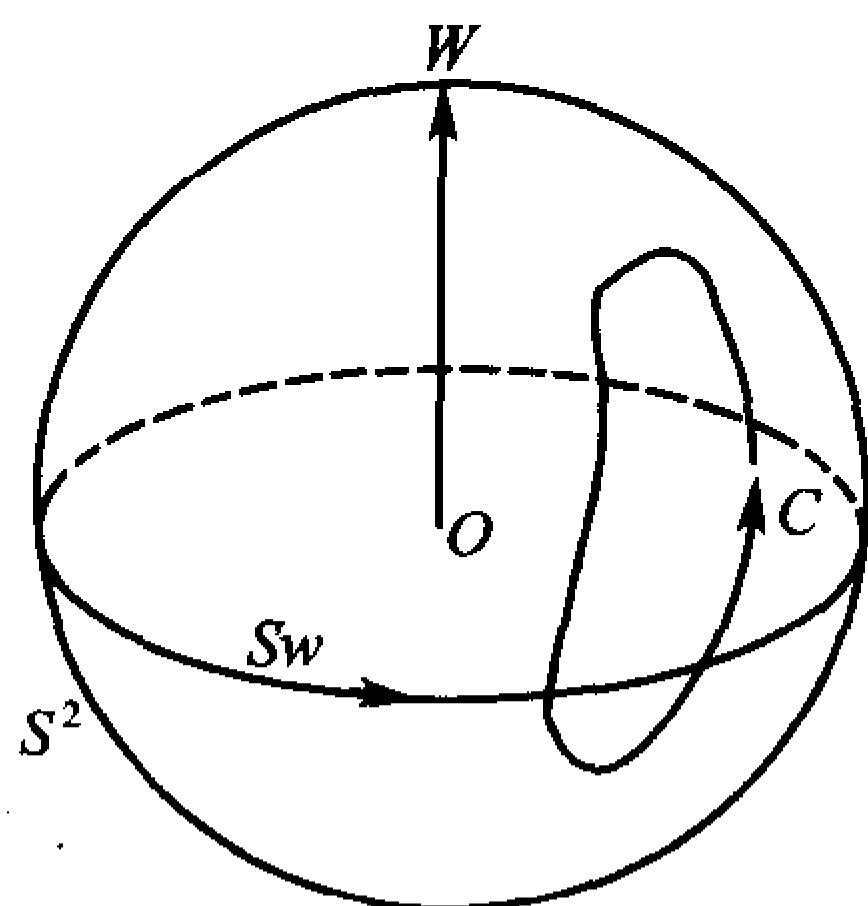


图 Ⅱ-12

定理 2.1(球面上的 Crofton 公式) 设 C 是单位球面 S^2 上长度为 l 的正则曲线,每个有向大圆 S_W 与 C 的交点数为 $\lambda(W)$,则

$$\iint_{S^2} \lambda(W)\mathrm{d}W = 4l,$$

其中 $\mathrm{d}W$ 是 S^2 上对应的极点集的面积元.

证明 设曲线 C 的位置向量 $x(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, 和 S^2 在该点的单位法向量 e_3 平行,方向相反,即 $e_3 = -x$. 曲线 C 的单位切向量 $T(s) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ 和 e_3 确定了另一单位向量 $Q(s) = e_3 \times T(s) = -x(s) \times T(s)$. 于是,根据第一章的 3.3.2,我们有[见第一章,(3.27),(3.28) 和(3.29)]

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = k_g Q + k_n e_3,$$

其中 k_g 和 k_n 分别表示 S^2 上沿 C 的测地曲率和法曲率.

因为

$$k_n = e_3 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} T = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} T = |T|^2 = 1,$$

故上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = k_g Q + e_3.$$

另外,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} \times T + e_3 \times \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \times T + e_3 \times (k_g Q + e_3) \\ &= k_g (e_3 \times Q) = -k_g T,\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -T.$$

因此,对于沿 C 的活动幺正标架 $\{x; T, Q, e_3\}$,我们有

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = k_g Q + e_3, \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = -k_g T, \\ \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -T.\end{cases} \tag{2.2}$$

现在任取与 C 相交的有向大圆 S_W,它对应的极点为 W, C 与

S_W 的一个交点为 $x(s)$，则 $We_3(s) = -Wx(s) = 0$（见图 Ⅱ-13）. 因此，W 与 T，Q 共面.

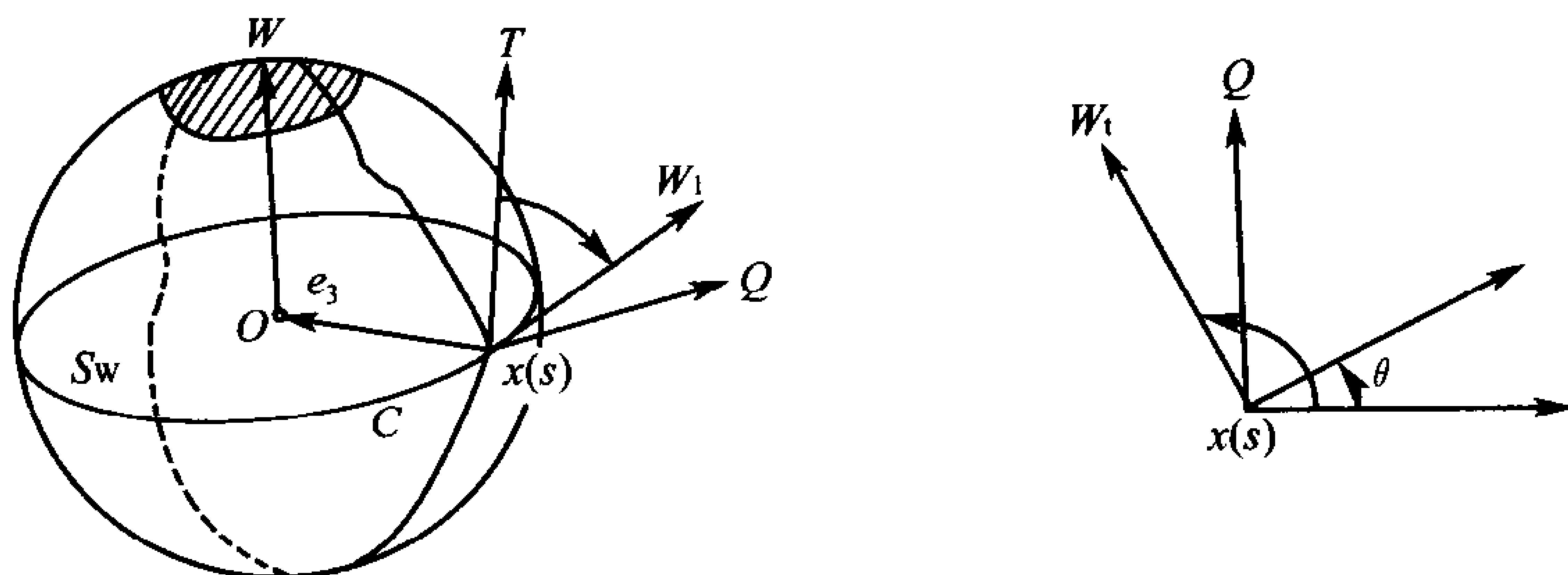


图 Ⅱ-13

设

$$W = \cos\theta\, T + \sin\theta\, Q,$$

其中 θ 是由 T 按逆时针方向转到 W 的有向角. 设 W_t 表示大圆 S_W 在与 C 交点处的单位切向量，用 φ 表示由 T 转到 W_t 的有向角，则（见图 Ⅱ-13）

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2},$$

从而

$$W = \sin\varphi\, T - \cos\varphi\, Q. \tag{2.3}$$

记住 T，Q 都是 s 的函数，则 W 是 s，φ 的函数；于是(2.3) 就是 S^2 上极点集（区域）的一个参数表示 $W = W(s,\varphi)$. 利用公式(2.2)，不难得

$$W'_s \times W'_\varphi = -\sin\varphi\, W,$$

$$|W'_s \times W'_\varphi| = |\sin\varphi|.$$

因此，在极点集上 S^2 的面积元为

$$dW = |\sin\varphi| \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}s.$$

对一切与 C 相交的有向大圆取上式的积分，注意到一个有向大圆与 C 相交于 p，则过 p 的 S^2 的一切大圆都与 C 相交，故上式右边积分为

$$\int_0^l \mathrm{d}s \int_0^{2\pi} |\sin\varphi| \mathrm{d}\varphi = 4l.$$

倘若有向大圆 S_W 与 C 有 $\lambda(W)$ 个交点，则在上述积分中这个有向大圆被计算了 $\lambda(W)$ 次，所以，

$$\iint_{S^2} \lambda(W) \mathrm{d}W = 4l.$$

证毕.

注　当 C 是 S^2 上分段光滑的曲线时，只要把这个定理应用到每段光滑弧上，然后相加，便可得定理同样的结论. 球面上的大圆相当于平面上的直线，因而也有类似的平面上的 Cauchy-Crofton 公式，详细可参考文献[1]. 这些都是属于积分几何的范畴，有关积分几何的内容，可参考 L. A. Santalo. Integral Geometry and Geometric Probability. London Addison Wisley, 1976(中译本：吴大任译. 积分几何与几何概率. 天津：南开大学出版社，1992).

2.2　空间曲线的全曲率

如本节开头所说，一条空间曲线 C 的全曲率 K 就是它的球面切线像 Γ 的长. 这方面最著名的结果恐怕要算 W. Fenchel 在 1929 年发表的下列定理.

定理 2.2(Fenchel 定理)　任一空间简单正则闭曲线 C 的全曲率 K 不小于 2π；当且仅当 C 为平面简单凸闭曲线时才有 $K = 2\pi$.

在证明此定理之前，我们先叙述两个引理. 如所知，单位球面 S^2 上每个大圆 S_W 把 S^2 分成两半球面. 包括 S_W 在内的半球面称为**闭半球面**，否则称为**开半球面**.

引理 2.3　若空间正则闭曲线C的切线像Γ落在一闭半球面内，则Γ必位于该半球面的边界大圆内.

证明　设包含Γ的闭半球面的边界为大圆S_W，它的极点位置向量为W. 于是C的单位切向量$T(s)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$满足$W\cdot T\geqslant 0$，因而

$$0\leqslant\int_0^l W\cdot T\mathrm{d}s=W\cdot\left(\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)=W\cdot x(s)\big|_0^l=0,$$

这里l是闭曲线C的长度，s是弧长参数. 由此推出$W\cdot T\equiv 0$，即Γ位于大圆S_W内. 证毕.

引理 2.4　空间正则闭曲线C的切线像Γ与S^2的一切有向大圆至少有两个交点.

证明　设S_W是S^2上任一有向大圆，它的极点位置向量为W. 设曲线C的方程为$x=x(s)$，$s\in[0,l]$，这里s是C的弧长参数. 考虑“高度函数”$h(s)=W\cdot x(s)$，它是定义在闭区间$[0,l]$上的连续函数. 于是，在$h(s)$达到最大和最小值的s处，就有

$$0=\frac{\mathrm{d}h(s)}{\mathrm{d}s}=W\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=W\cdot T(s).$$

由此可见，这些s所对应的Γ上的点落在大圆S_W上，即Γ与S_W至少有两个交点. 证毕.

Fenchel 定理的证明

先说明一些初等事实. S^2上两点a,b称为**对径点**如果它们位于过球面球心O的一条直线上. 过a,b的大圆劣弧与切线像Γ的弧分别记为$\overline{ab}$与$\widehat{ab}$，它们的长度仍用同一符号表示. 大圆劣弧$\overline{ab}$是球面上两点a,b之间的球面最短距离，即总有$\overline{ab}\leqslant\widehat{ab}$. 而且若$a,b$不是对径点，则等号仅当$\widehat{ab}$与$\overline{ab}$重合时成立(参考第四章，曲面上的测地线).

现证明定理. 在切线像Γ上选取两点a,b使得Γ被分成长度相等$(=K/2)$的两段Γ_1和Γ_2. 分两种情况讨论.

（Ⅰ）a,b 为对径点，则$\overline{ab}=\pi$. 注意到 Γ_1（或 Γ_2）的长 $\geqslant\overline{ab}$，故 Γ 的长 $K\geqslant 2\,\overline{ab}=2\pi$. 而且等号当且仅当 Γ_1 和 Γ_2 均为半大圆弧时成立，此时 Γ 必位于某一闭半球面内.

（Ⅱ）a,b 不是对径点，则$\overline{ab}<\pi$. 取$\overline{ab}$的中点 m，并以 m 为（北）极点作大圆 S_m. 显然，a,b 不在 S_m 上（见图 Ⅱ-14）. 由引理 2.4，Γ 必与 S_m 相交. 设 p 是 Γ 与 S_m 的一个交点，且不妨设 $p\in\Gamma_1$. 那么

$$\frac{K}{2}=\widehat{ap}+\widehat{bp}\geqslant\overline{ap}+\overline{bp}.$$

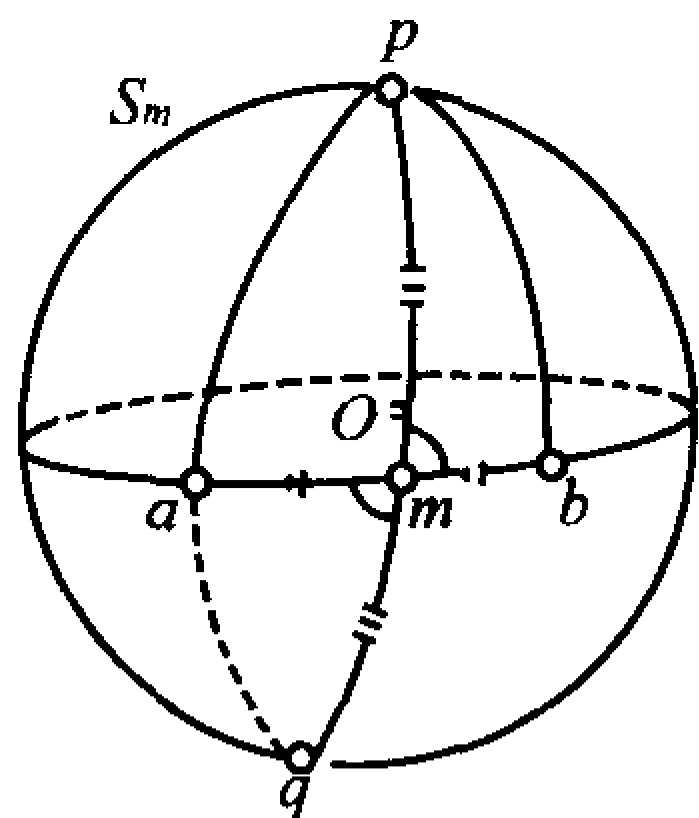


图 Ⅱ-14

如果把$\overline{pm}$延伸到 p 的对径点 q（图 Ⅱ-14），则不难看出

$$\overline{ap}+\overline{bp}=\overline{ap}+\overline{aq}=\overline{pq}=\pi.$$

由此即得 $K\geqslant 2\pi$，其中等号仅当$\widehat{ap}=\overline{ap}$，$\widehat{bp}=\overline{ap}$ 时成立，即$\widehat{ap}$，$\widehat{bp}$ 只能是北半球面上的大圆弧. 于是 $\Gamma_1=\overline{ap}\cup\overline{bp}$ 落在北闭半球面内. 同理，当 $K=2\pi$ 时，Γ_2 也落在北闭半球面内.

综合（Ⅰ）和（Ⅱ），可见 $K\geqslant 2\pi$，而且当 $K=2\pi$ 时，Γ 落在一闭半球面内. 根据引理 2.3，此时 Γ 必位于该闭半球面的边界大圆内. 设此大圆的极点向量为 n，则

$$0=nT(s)=n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(nx(s)),$$

即

$$nx(s)=\text{const}.$$

因此，C 是平面曲线. 设 C 的相对曲率为 k_r，由旋转指标定理$\int_0^l k_r\mathrm{d}s=2\pi$（取正向），则

$$2\pi=\int_0^l k_r\mathrm{d}s\leqslant\int_0^l k\mathrm{d}s=K=2\pi.$$

注意到 $k \geqslant k_r$，由此推出 $k_r = k \geqslant 0$. 再由定理 1.8，C 是凸闭曲线. 证毕.

作为 Fenchel 定理的推广，我们可以考虑空间分段光滑的简单闭曲线 C，这时 C 的全曲率可定义为

$$K = \sum_i \int_{C_i} k\mathrm{d}s + \sum_i \theta_i,$$

其中 C_i 是 C 的一个光滑弧段，θ_i 是各顶点处的外角. 白正国证得 $K \geqslant 2\pi$，等号仅当 C 由同一平面内的凸曲线弧连结而成时成立（参考：白正国. 关于空间曲线多边形的全曲率. 数学学报，6(1956)；7(1957)).

Fenchel 定理中全曲率 K 的下界估计也可从球面 Crofton 公式得到. 事实上，S^2 上所有有向大圆的集合的测度等于对应的极点集合的面积，即整个 S^2 的面积 4π. 因此，

$$\iint_{S^2} \mathrm{d}W = 4\pi. \tag{2.4}$$

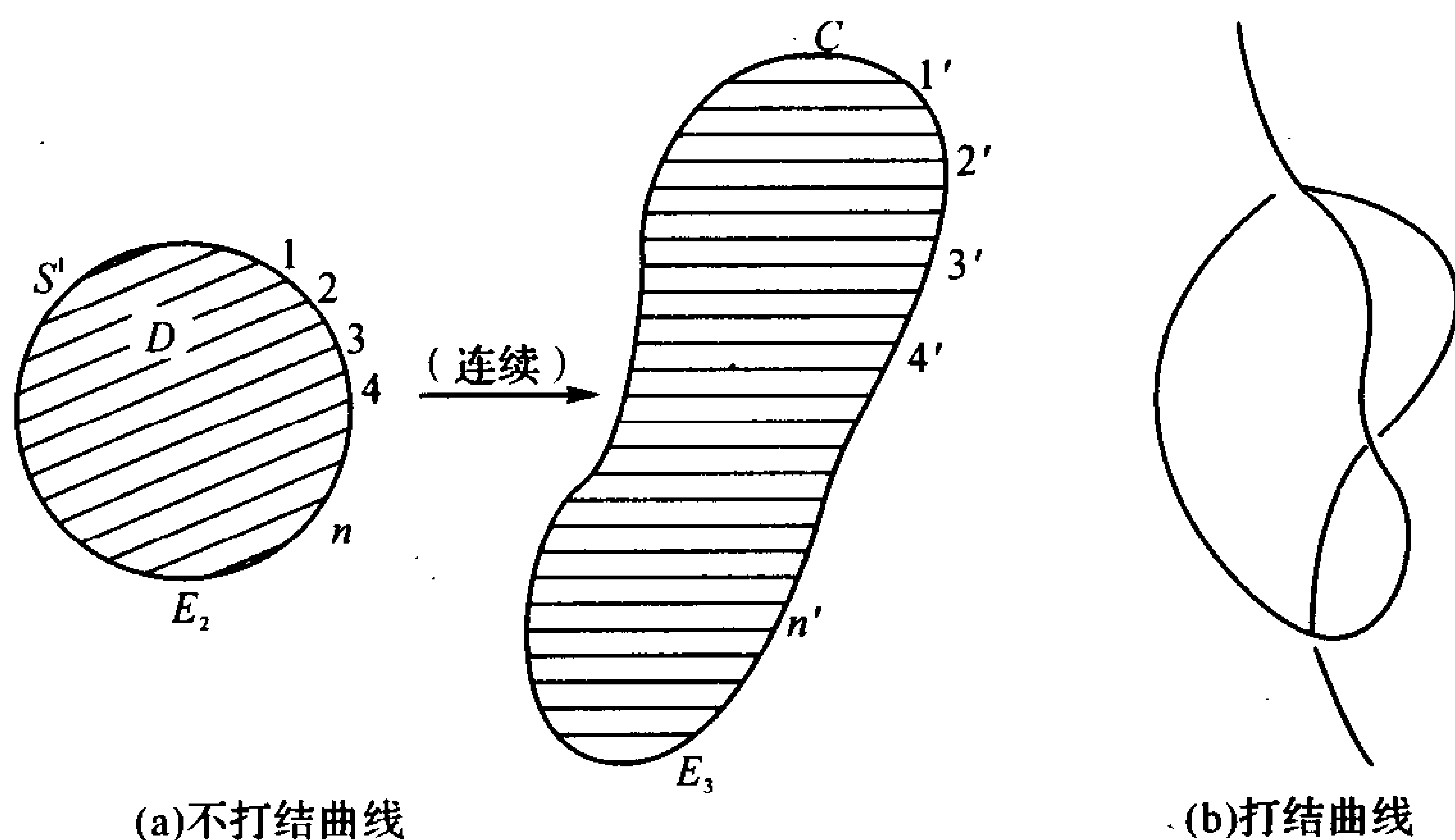
另一方面，引理 2.4 指出每个有向大圆与 Γ 至少有两个交点，即交点数 $\lambda(W) \geqslant 2$. 应用球面 Crofton 公式，Γ 的长度 K 满足

$$4K = \iint_{S^2} \lambda(W)\mathrm{d}W \geqslant 2\iint_{S^2} \mathrm{d}W = 8\pi.$$

所以 $K \geqslant 2\pi$.

利用球面 Crofton 公式还可给出空间"打结"曲线的全曲率估计. 为此，先说明"打结"的概念. 平面上一个圆 S^1 所围的闭区域 D 称为一个**单位圆盘**. 已给空间一条简单闭曲线 C，如果存在连续映射 $D \to \mathbf{E}^3$ 使得 D 的边界 S^1 正好 1－1 地映为 C，则 C 称为**不打结**曲线；否则称为**打结**曲线. 见图 Ⅱ-15. I. Fary (1949) 和 J. Milnor (1950) 各自独立地得到了下列定理.

定理 2.5（Fary-Milnor 定理） 设 C 是打结的简单正则空间闭曲线，则其全曲率 K 不小于 4π.



(a)不打结曲线　　(b)打结曲线

图 I-15

证明　由引理 2.4,"高度函数"$h(s)$ 的极大或极小值的总数必为偶数,这是因为 $h(s)$ 是周期函数,它的极值是成对出现的. 现用反证法,设 $K < 4\pi$. 根据球面 Crofton 公式,

$$\iint_{S^2} \lambda(W)\mathrm{d}W = 4K < 16\pi.$$

于是,S^2 上至少有一个有向大圆 S_0 与 Γ 的交点数 $\lambda(S_0) = 2$. 因为否则由(2.4)式

$$\iint_{S^2} \lambda(W)\mathrm{d}W \geqslant 4\iint_{S^2} \mathrm{d}W = 16\pi.$$

这与上面矛盾. 不失一般性,可以假定大圆 S_0 的极点是点(0,0,1). 于是相应的"高度函数"就是曲线 C 的第三个坐标分量函数 $x^3(s)$,$s \in [0,l]$. 既然 $\lambda(S_0) = 2$,故 $x^3(s)$ 仅有一个极大值和一个极小值. 设 $x^3(s_1) = h_1$ 为极小值,$x^3(s_2) = h_2$ 为极大值. 对介于 h_1 和 h_2 之间的每个数 h,可作一高度为 h 的截面 $x^3 = h$. 我们要说明这个截面只与曲线 C 相交两点. 显然至少有两个交点,因为从最高

点按曲线的定向走向最低点时至少要与截面交一点 p_1，再从最低点沿 C 定向走到最高点时又至少与截面交一点 p_2，见图 Ⅱ-16. 如果 C 与截面还有一交点 q，不妨设 q 位于从 p_1 到 p_2 的曲线弧中. 由于 $x^3(p_1)=x^3(q)=h$，由中值定理知，在 C 的开弧段 $\overset{\frown}{p_1q}$ 中必有一

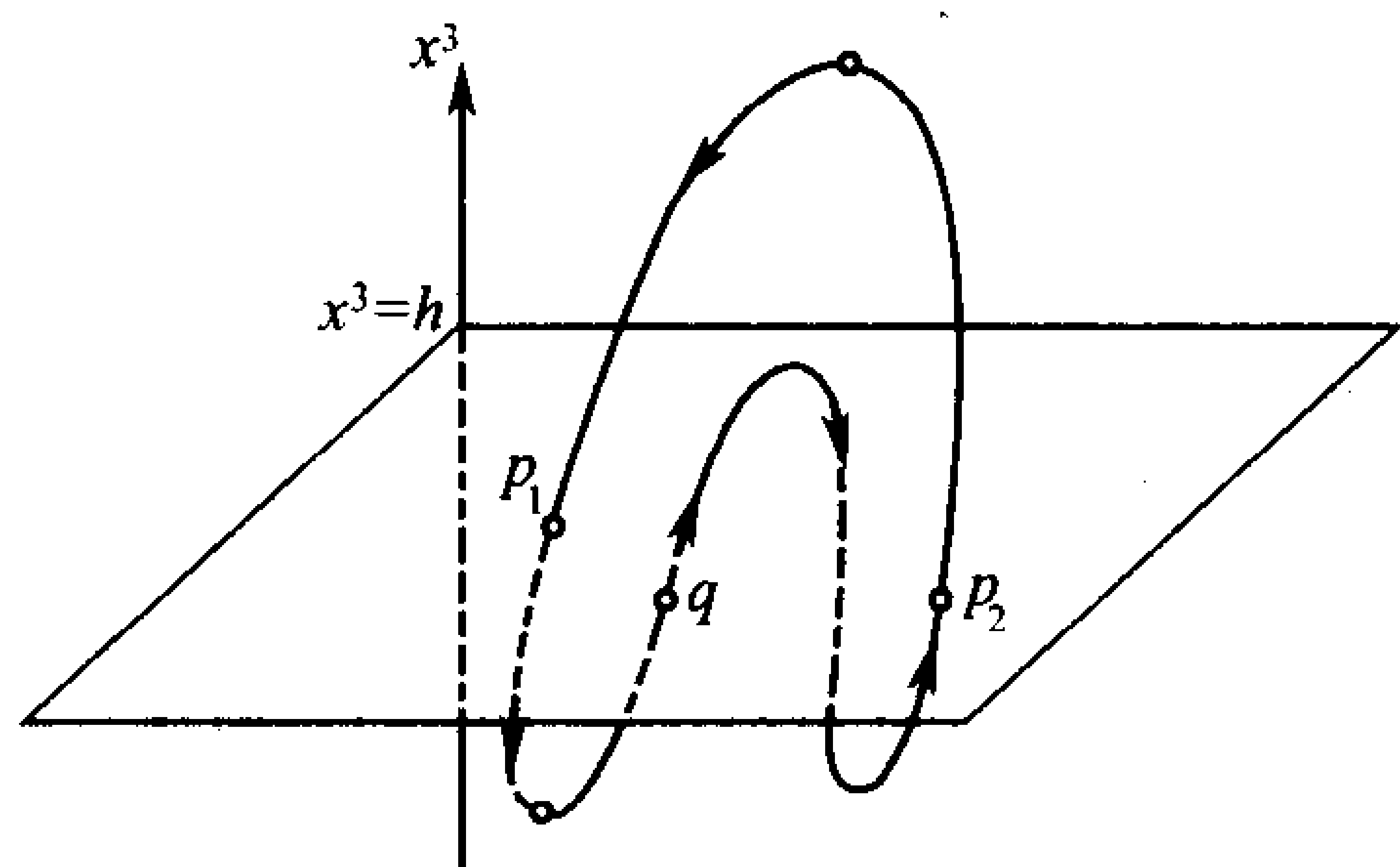


图 Ⅱ-16

个极值点. 同理，在 C 的开弧段 $\overset{\frown}{qp_2}$ 中也有一个极值点. 再加上最高点一起，C 上就有了三个极值点，这是不可能的. 因此，每个截面 $x^3=h(h_1<h<h_2)$ 只与 C 相交两点. 把这两点用线段连接起来，所有这些线段将构成同胚于圆盘 D 的曲面片，它的边界正是 C，从而 C 是不打结的. 这与定理条件矛盾. 因此 $K\geqslant 4\pi$. 证毕.

2.3 空间曲线的全挠率

设 $C: x=x(s)$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中可微曲线，s 是它的弧长参数. 在 C 的每点取单位切向量 $T=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ 作为活动标架的 e_1（或作为 $-e_1$），于是，e_2 和 e_3 便落在该点的 C 的法平面内. 沿 C 我们有

$$\mathrm{d}x=\omega^1e_1,\quad \omega^2=\omega^3=0,\quad \mathrm{d}s^2=|\mathrm{d}x|^2=(\omega^1)^2.$$

通常可取 $\mathrm{d}s=\omega^1$（即 e_1 方向与 C 的定向一致）.

在取定 e_1 后，e_2 和 e_3 还可在法平面内旋转. 由于要保持（e_1,e_2，

$e_3) = 1$(右手系)，故只要选定 e_2，则 $e_3 = e_1 \times e_2$ 就唯一确定了. 现考虑法平面内的一个旋转变换

$$\begin{cases} \bar{e}_2 = \cos\theta\, e_2 + \sin\theta\, e_3, \\ \bar{e}_3 = -\sin\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $\theta = \theta(s)$，是 C 上的函数.

设 $\{\omega_i^j\}$ 和 $\{\bar{\omega}_i^j\}$ 分别是关于幺正标架 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{x; e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 的无穷小运动分量(见第一章)，它们都是关于 $\mathrm{d}s$ 的 1 形式，可设

$$\omega_i^j = a_i^j(s)\mathrm{d}s, \quad \bar{\omega}_i^j = \bar{a}_i^j(s)\mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

于是，由(2.5)得

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1^2 = (\mathrm{d}e_1)\bar{e}_2 = \cos\theta\, \omega_1^2 + \sin\theta\, \omega_1^3, \\ \bar{\omega}_1^3 = (\mathrm{d}e_1)\bar{e}_3 = -\sin\theta\, \omega_1^2 + \cos\theta\, \omega_1^3. \end{cases}$$

利用(2.6)，即得

$$\begin{aligned} \bar{a}_1^2 &= \cos\theta\, a_1^2 + \sin\theta\, a_1^3, \\ \bar{a}_1^3 &= -\sin\theta\, a_1^2 + \cos\theta\, a_1^3. \end{aligned} \tag{2.7}$$

因此，量

$$k^2 = (a_1^2)^2 + (a_1^3)^2 = (\bar{a}_1^2)^2 + (\bar{a}_1^3)^2$$

与变换(2.5)无关. 我们选取 θ 使得

$$\bar{a}_1^3 = -\sin\theta\, a_1^2 + \cos\theta\, a_1^3 = 0.$$

显然，θ 确定到只差 π，即 $\bar{e}_2$ 确定到只差一个符号. 这个向量 $\bar{e}_2 = N$ 就是 C 的**主法向量**，这时

$$k = \bar{a}_1^2 = \sqrt{(a_1^2)^2 + (a_1^3)^2}.$$

它就是 C 的**曲率**. 若令 $B = \bar{e}_3$，$\tau = \bar{a}_2^3$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

$\{T, N, B\}$ 就是 C 的 Frenet 标架，τ 就是 C 的挠率. 由 $\frac{\mathrm{d}\bar{e}_3}{\mathrm{d}s} = -\tau\bar{e}_2$，

可见挠率与 $\bar{e}_2 = N$ 的定向无关，因为若取 $\bar{e}_2$ 为 $-\bar{e}_2$，则右手系的要求保证 $\bar{e}_3$ 也变为 $-\bar{e}_3$.

由(2.8)和(2.5)，我们有

$$\begin{aligned}\tau\mathrm{d}s &= (\mathrm{d}N)B = (\mathrm{d}\bar{e}_2)\bar{e}_3 \\ &= [(\mathrm{d}\theta)\bar{e}_3 + \cos\theta\,\mathrm{d}e_2 + \sin\theta\,\mathrm{d}e_3]\bar{e}_3 = \mathrm{d}\theta + (\mathrm{d}e_2)e_3,\end{aligned}$$

即

$$\tau\mathrm{d}s = (\mathrm{d}\bar{e}_2, e_1, \bar{e}_2) = (\mathrm{d}e_2, e_1, e_2) + \mathrm{d}\theta. \tag{2.9}$$

这表明微分形式 $(\mathrm{d}e_2, e_1, e_2)$ 在法平面的变换(2.5)下只相差一个旋转角的微分 $\mathrm{d}\theta$. 由此，若 C 是空间正则闭曲线，$\nu(s)$ 是 C 上任一单位法向量，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_C(\mathrm{d}\nu, T, \nu) = \frac{1}{2\pi}\int_C\tau\mathrm{d}s \pmod 1.$$

定义 对于空间正则闭曲线 C，积分

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_C(\mathrm{d}\nu, T, \nu) \pmod 1 \tag{2.10}$$

称为 C 的全挠率，其中 ν 是 C 上任一单位法向量，T 是 C 的单位切向量.

(2.10)的优点在于不必考虑 C 上使 $k=0$ 的孤立奇点；在这种奇点处，C 的主法向量 N 是不确定的. 此外，若用 $\nu^{\perp}$ 表示法平面中与 ν 正交的单位向量，则(2.10)也可改写为

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_C(\mathrm{d}\nu)\nu^{\perp} \pmod 1. \tag{2.10'}$$

定理 2.6 空间曲线的全挠率在 $\mathbf{E}^3$ 的共形变换下不变.

证明 $\mathbf{E}^3$ 的共形变换是指它的欧氏度量 $\mathrm{d}s^2$（空间弧长微分的平方）变为新度量

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \rho^2\mathrm{d}s^2, \tag{2.11}$$

其中 ρ 是空间的正函数. 显然，在变换(2.11)下，两方向之间的角度保持不变，故也称为保角变换. 设在原度量 $\mathrm{d}s^2$ 下沿曲线 C 的幺正标架为 $\{e_1, e_2, e_3\}$，其中 $e_1 = T$ 是 C 的单位切向量. 按(2.10′)，C

的全挠率为

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_C \{(\mathrm{d}e_2)e_3\}_{\mathrm{d}s^2} \quad (\mathrm{mod}\ 1).$$

这里花括号是强调在原度量 $\mathrm{d}s^2$ 下的向量内积.

在新度量 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 下，$\{e_1, e_2, e_3\}$ 仍是沿 C 的正交标架，但不再是单位向量了；尤其是 e_1 仍是 C 的切向量. 取

$$\bar{e}_i = \frac{1}{\rho}e_i, \quad (i = 1,2,3),$$

则 $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ 便是在新度量 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 下沿 $\bar{C}$ 的幺正标架，这里 $\bar{C}$ 是 C 在共形变换下的像. 类似于(2.10′)，这里 $\bar{C}$ 的全挠率应为

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{C}} \{(\mathrm{d}\bar{e}_2)\bar{e}_3\}_{\mathrm{d}\bar{s}^2} \quad (\mathrm{mod}\ 1).$$

由(2.11)容易计算

$$\{(\mathrm{d}\bar{e}_2)\bar{e}_3\}_{\mathrm{d}\bar{s}^2} = \rho^2\{(\mathrm{d}\bar{e}_2)\bar{e}_3\}_{\mathrm{d}s^2} = \{(\mathrm{d}e_2)e_3\}_{\mathrm{d}s^2}.$$

因此，$\sigma = \bar{\sigma}\ (\mathrm{mod}\ 1)$. 证毕.

定理 2.7 球面上任何闭曲线的全挠率等于零. 反之，若曲面 M 上任何闭曲线的全挠率为零，则 M 是球面或平面的一部分.

证明 先证定理的第一部分. 不妨设曲线 $C: x = x(s)$ 是半径为 r 的球面 $S^2(r) = \{x \in \mathbf{E}^3 \mid |x|^2 = r^2\}$ 上的闭曲线，$s \in [0, l]$ 是它的弧长参数. 于是，

$$|x(s)|^2 = r^2, \quad x(s)\cdot T(s) = 0, \tag{2.12}$$

其中 $T(s) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ 是 C 的单位切向量. 取沿 C 的 Frenet 标架场 $\{x(s); T(s), N(s), B(s)\}$. (2.12) 的第二式使我们可设

$$x(s) = r\cos\theta(s)N(s) + r\sin\theta(s)B(s).$$

对上式两边求导，利用 Frenet 公式得

$$T = -rk\cos\theta\, T - r\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \tau\right)N + r\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \tau\right)B,$$

其中 k 和 τ 分别是 C 的曲率和挠率. 由此得

$$1 + rk\cos\theta = 0,\quad \sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \tau\right) = 0,\quad \cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \tau\right) = 0.$$

上面第一式表明 $\cos\theta \neq 0$，故从第三式得

$$\tau\mathrm{d}s + \mathrm{d}\theta = 0.$$

因此，

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_C \tau\mathrm{d}s \equiv 0 \pmod 1.$$

现证定理的第二部分. 显然，我们只要证明 M 上每点都是脐点. 用反证法. 设 M 上有一非脐点，则存在包含该点的一邻域 $U \subset M$，使 U 中没有脐点. 在 U 上取曲面的曲率线参数网 (u^1, u^2)，使曲面方程为 $x = x(u^1, u^2)$. 于是，我们取 e_3 为曲面的单位法向量，并取

$$e_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}\Big/\sqrt{E},\quad E = \left|\frac{\partial x}{\partial u^1}\right|^2,$$

$$e_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}\Big/\sqrt{G},\quad G = \left|\frac{\partial x}{\partial u^2}\right|^2,$$

使它们分别是对应于主曲率 k_1 和 k_2 的主方向. 在这样的幺正标架场下，

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \sqrt{E}\,\mathrm{d}u^1, & \omega^2 &= \sqrt{G}\,\mathrm{d}u^2, \\ \omega_1^3 &= k_1\omega^1, & \omega_2^3 &= k_2\omega^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

现设 $C: x = x(u^1(s), u^2(s)) = x(s)$ 是位于 U 中的任一闭曲线，s 是它的弧长参数，$T(s) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ 是它的单位切向量. 取 $Q = e_3 \times T$，则有

$$Q = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2 = -\frac{\omega^2}{\mathrm{d}s}e_1 + \frac{\omega^1}{\mathrm{d}s}e_2, \tag{2.14}$$

因为沿 C 有 $\omega^1 = \cos\theta\,\mathrm{d}s$，$\omega^2 = \sin\theta\,\mathrm{d}s$（参见第一章，3.2）.

显然，e_3 和 Q 构成 C 上每点的法平面的幺正基. 这样，由 (2.10′) 和定理条件有

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_C (\mathrm{d}e_3)Q \equiv 0 \pmod 1. \tag{2.15}$$

利用(2.13)和(2.14)易得

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}e_3)Q &= (-\omega_1^3 e_1 - \omega_2^3 e_2)\left(-\frac{\omega^2}{\mathrm{d}s}e_1 + \frac{\omega^1}{\mathrm{d}s}e_2\right) \\
&= (k_1\omega^1 e_1 + k_2\omega^2 e_2)\left(\frac{\omega^2}{\mathrm{d}s}e_1 - \frac{\omega^1}{\mathrm{d}s}e_2\right) \\
&= (k_1 - k_2)\frac{\omega^1\omega^2}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\frac{\omega^2}{\mathrm{d}s}\omega^1 + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\frac{\omega^1}{\mathrm{d}s}\omega^2.
\end{aligned}
$$

根据定理条件，(2.15)中积分与路径 C 无关，因而被积函数是某个函数的全微分(mod $\mathrm{d}\theta$)。因此，存在函数 $F: U \to R$，使

$$
(\mathrm{d}e_3)Q = \mathrm{d}F = F_1\omega^1 + F_2\omega^2.
$$

与上面的计算结果相比较，便得

$$
\frac{1}{2}(k_1 - k_2)\frac{\omega^2}{\mathrm{d}s} = F_1, \quad \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\frac{\omega^1}{\mathrm{d}s} = F_2, \tag{2.16}
$$

其中 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}$。将(2.16)两边平方，有

$$
\frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2(\omega^2)^2 = (F_1)^2[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2],
$$

$$
\frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2(\omega^1)^2 = (F_2)^2[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2].
$$

两式相加得

$$
\frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2.
$$

代回原式得

$$
[(F_1)^2 + (F_2)^2](\omega^2)^2 = (F_1)^2[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2],
$$

即

$$
(F_1\omega^1 + F_2\omega^2)(F_1\omega^1 - F_2\omega^2) = 0.
$$

因为 ω^1 和 ω^2 是线性独立的，故从上式推得

$$
F_1 = 0, \quad F_2 = 0.
$$

代入(2.16)就有 $k_1 = k_2$。这与 $U \subset M$ 中没有脐点相矛盾。因此，M

上每点都是脐点. 定理 2.7 证毕.

注 这个定理的第二部分最早由 W. Scherrer 在 1940 年得到. 这里我们给出一个较简便的证明.

全挠率的重要性还在于它与曲线的环绕数有关. 设 $C: x = x(s)$ 和 $C_1: x = x_1(t)$ 是两条不同的空间闭曲线, 它们的环绕数 (Linking number) $L(C, C_1)$ 定义为

$$L(C, C_1) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{C \times C_1} \frac{1}{r^3} (x - x_1, \mathrm{d}x, \mathrm{d}x_1), \tag{2.17}$$

其中 $r^2 = |x - x_1|^2 > 0$. 它的另一解释是由

$$\varphi(s, t) = \frac{x(s) - x_1(t)}{|x(s) - x_1(t)|} \quad (x \in C,\ x_1 \in C_1)$$

定义的映射 $\varphi: C \times C_1 \to S^2 \subset \mathbf{E}^3$ 的映射度数. (2.17) 中的积分是 Gauss 在研究电磁现象时得到的, 故称为 Gauss 积分. 环绕数 L 是个整数, 图 Ⅱ-17 分别给出了 $L = 0, 1, 2$ 的情况. 在生物化学中, DNA (脱氧核糖核酸) 分子的数学模型要用到环绕数的概念, 从而引起了数学家们广泛兴趣. 当 $C_1 = C$ 时, 类似 (2.17) 的积分

$$W = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{C \times C} \frac{1}{r^3} (x - \bar{x}, \mathrm{d}x, \mathrm{d}\bar{x}) \tag{2.18}$$

称为 C 的拧数 (Writhing number), 其中 $r^2 = |x - \bar{x}|^2 > 0$, $x, \bar{x} \in C$. 现设 $\nu(s)$ 是 C 上任一单位法向量场, 取充分小数 $\varepsilon > 0$, 构造曲线 $C_\varepsilon: x_\varepsilon(s) = x(s) + \varepsilon\nu(s)$. 那么,

$$L(C, C_\varepsilon) = W + \sigma,$$

其中 σ 就是 C 的全挠率. 这个公式是由 J. H. White 得到的 (见 Amer. J. Math., 1969, 91: 693 ~ 728). 当 C 的曲率处处非零时, 类似的公式分别由 G. Călugăreanu (见 Rev. Math. Pure Appl., 1959, 4: 5 ~ 20) 和 W. F. Pohl (见 J. Math. Mech., 1968, 17: 975 ~ 985) 先后给出.

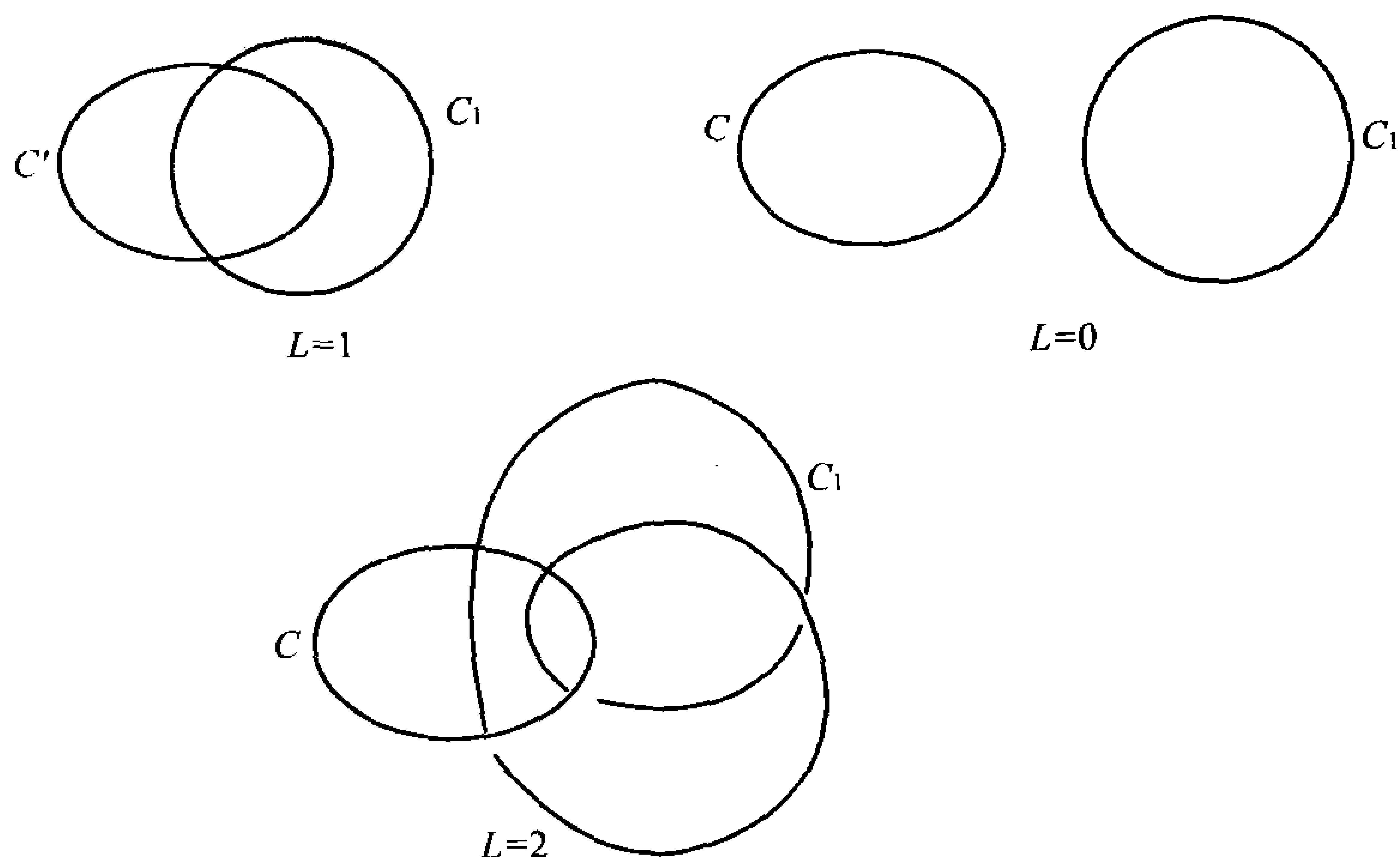


图 Ⅱ-17

习　题

1. 证明：曲率 $k(s) \leqslant \frac{1}{r}$（$r > 0$ 为常数）的最短闭曲线是半径为 r 的圆周.

2*.（**A. Schur 定理**）设 C 是曲率为 $k(s)$ 的平面曲线段，端点为 A 和 B，C 与弦 $\overline{AB}$ 一起构成平面凸闭曲线. 又设 $\overline{C}$ 是与 C 有相同长度 L 的空间曲线弧段，端点为 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$，而且当 $\overline{C}$ 以 C 的同参数 s 表达时，$\overline{C}$ 的曲率 $\overline{k}(s) \leqslant k(s)$. 令 d 和 $\overline{d}$ 分别为弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$ 的长度. 求证：$d \leqslant \overline{d}$，其中等号当且仅当 $\overline{C}$ 与 C 合同时成立.

3*.（**H. A. Schwarz 定理**）设 C 是连结两定点 A 和 B 的曲线

段，其曲率 $k(s) \leqslant \frac{1}{r}$（$r > 0$ 常数），$d \leqslant 2r$ 为 A 和 B 之间的距离. 又设 S^1 是过 A 和 B 的半径为 r 的圆. 证明：C 的长度或比劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 短，或比优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 长.

4. 设 C 是球面 S^2 上的闭曲线，其曲率和挠率分别为 $k(s)$ 和 $\tau(s)$，且 $k(s) \neq 0$. 证明：$\int_C \left(\frac{\tau}{k}\right) \mathrm{d}s = 0$.

5*. 若曲面 M 上任何闭曲线 C 都成立 $\int_C (\frac{\tau}{k}) \mathrm{d}s = 0$，试证：$M$ 是球面或平面的一部分（参考 B Segre. Atti della Acad. Nazi. dei Lincei, Rendiconti, 1947, 3: 420 ～ 422）.

第三章　$\mathbf{E}^3$ 中曲面的整体微分几何

曲面的整体微分几何在 20 世纪得到了全面发展，并成为高维流形几何的重要源泉. 曲面整体性质的研究仍是现代微分几何学的重要方向之一.

本章介绍 $\mathbf{E}^3$ 中曲面的某些整体性质，这不仅需要曲面的局部理论，也涉及欧氏空间点集拓扑的某些知识，主要是有关欧氏空间中连通紧致集的一些基本性质. 为了完整起见，我们把这些材料简要列举在附录 A 中，欲知详细可参考文献[3].

§1　曲面的 Gauss-Bonnet 公式

1.1　曲面的整体描述

记得 Jordan 曲线定理(第二章，定理 1.1)说，$\mathbf{E}^2$ 上的简单闭曲线 C 把 $\mathbf{E}^2$ 分成两个连通分支，它们都以 C 为边界. 我们把不包含 C 的那个有限连通分支称为一个**开邻域**. 设 $U \subset \mathbf{E}^2$ 是一开邻域，其上坐标为 $u=(u^1,u^2)$. $\mathbf{E}^3$ 中一片**C^k 阶曲面片** M 是指一个映射 $x: U \to \mathbf{E}^3$ 的像 $x(U)=M\subset \mathbf{E}^3$，它满足下列条件：

(1) $x: U \to M$ 是 C^k 阶的，即若映射 x 表示成

$$x(u)=(x^1(u^1,u^2),x^2(u^1,u^2),x^3(u^1,u^2)),$$

则直角坐标函数 $x^i(u^1,u^2)$ 具有直到 k($\geqslant 1$ 的正整数或 $+\infty$) 阶的连续偏导数($i=1,2,3$). 当它们为实解析函数时，x 称为 C^ω 阶的.

(2) $x(u)$ 是一同胚，即它的逆映射 $u=x^{-1}:M\to U$ 存在且连续.

(3) $x(u)$ 是正则的，即 $x_{u^1} \times x_{u^2} \neq 0$，或 Jacobi 矩阵$\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$ $(i = 1,2,3; \alpha = 1,2)$ 的秩为 2.

条件(1) 和(3) 是保证曲面片的光滑性和正则性，一般总要求 $k \geqslant 2$，这对研究 M 的局部微分几何性质是十分自然的要求. 条件(2) 一方面可避免正则曲面的自身相交性，另一方面可用来防止出现某些难以处理的不寻常现象.

这样定义的曲面片还不能包括许多常见的曲面. 例如，对于普通球面，常用的球面坐标(θ,φ)

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta$$

就不符合条件(2) 的要求，因为当$\theta = 0$时，不论φ为何值，$(0,\varphi)$都对应着一个北极$(0,0,r)$. 事实上，整个球面不能算是曲面片，因为它是 $\mathbf{E}^3$ 的有界闭子集，球面上任何无限点序列必有极限点. 若球面是曲面片，则根据(2)，$\mathbf{E}^2$ 中开邻域 U 内的任何点序列也将在 U 内有极限点，这显然不可能.

定义 $\mathbf{E}^3$ 中的子集M称为一张C^k 阶**曲面**，如果存在一系 C^k 阶曲面片$\{x_\lambda : U_\lambda \to M_\lambda\}_{\lambda\in L}$，其中$\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$是 $\mathbf{E}^2$ 中的一系开邻域，使得

(1)$M = \bigcup_{\lambda\in L} M_\lambda$，即$\{M_\lambda\}_{\lambda\in L}$ 构成 M 的一个开覆盖. M_λ 称为 M 的**坐标邻域**，$u_\lambda = x_\lambda^{-1} : M_\lambda \to U_\lambda$ 称为 M 上的局部坐标，$u_\lambda = (u_\lambda^1, u_\lambda^2)$. 集合$\{(M_\lambda,u_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ 称为 M 的**坐标图集**.

(2) 若 $M_\lambda \cap M_\mu \neq \varnothing (\lambda,\mu \in L)$，则对于 $M_\lambda \cap M_\mu$ 上的两种局部坐标 u_λ 和 u_μ 存在 C^k 阶映射

$$u_\mu \circ u_\lambda^{-1} : u_\lambda(M_\lambda \cap M_\mu) \to u_\mu(M_\lambda \cap M_\mu),$$

即存在 C^k 阶坐标变换

$$u_\mu^1 = u_\mu^1(u_\lambda^1, u_\lambda^2), \quad u_\mu^2 = u_\mu^2(u_\lambda^1, u_\lambda^2).$$

简言之，$\mathbf{E}^3$ 中一张 C^k 阶曲面是若干(可能无限)张满足相容性条件(2) 的 C^k 阶曲面片的并集. 以后若无特殊说明，曲面都是指

$C^k(k \geqslant 2)$ 阶的，并简称为**光滑曲面**或**曲面**.

显然，曲面片本身就是曲面.

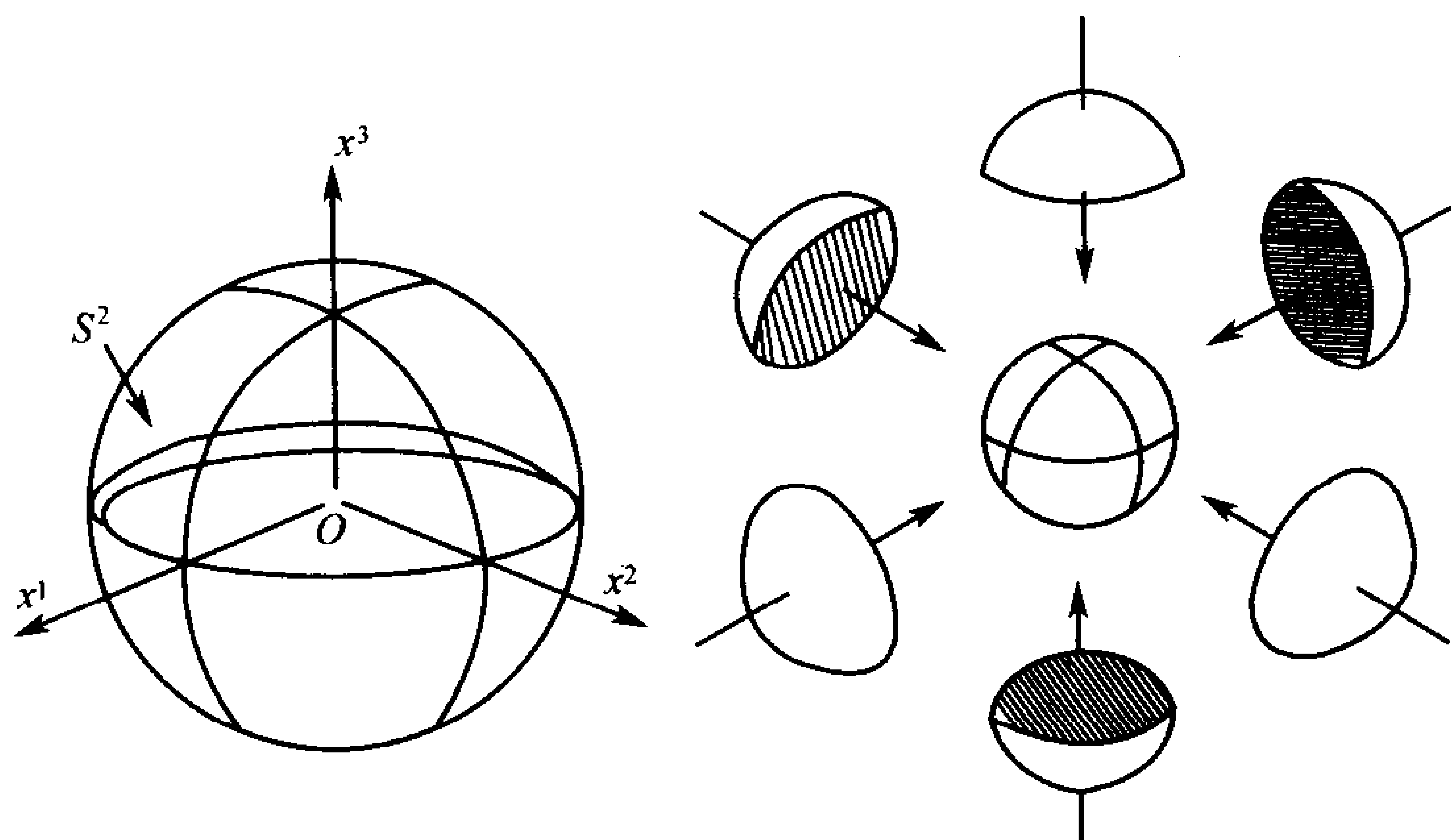
现说明整个球面符合这个定义.

事实上，球面 $S^2:(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$ 可用下列 6 块曲面片 $\overline{U}_1,\overline{U}_2,\cdots,\overline{U}_6$ 加以覆盖，取 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

$$\left.\begin{aligned}&\overline{U}_1:(x^1,x^2)\text{ 为坐标},x^3=\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}>\varepsilon\\&\overline{U}_2:(x^1,x^2)\text{ 为坐标},x^3=-\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}<-\varepsilon\end{aligned}\right\}$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2<1-\varepsilon^2,$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{U}_3:(x^2,x^3)\text{ 为坐标},x^1=\sqrt{1-(x^2)^2-(x^3)^2}>\varepsilon\\&\overline{U}_4:(x^2,x^3)\text{ 为坐标},x^1=-\sqrt{1-(x^2)^2-(x^3)^2}<-\varepsilon\end{aligned}\right\}$$
$$(x^2)^2+(x^3)^2<1-\varepsilon^2,$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{U}_5:(x^3,x^1)\text{ 为坐标},x^2=\sqrt{1-(x^1)^2-(x^3)^2}>\varepsilon\\&\overline{U}_6:(x^3,x^1)\text{ 为坐标},x^2=-\sqrt{1-(x^1)^2-(x^3)^2}<-\varepsilon\end{aligned}\right\}$$
$$(x^1)^2+(x^3)^2<1-\varepsilon^2.$$



由于$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$，$|x^1|,|x^2|,|x^3|$中至少有一个大于或等于$1/\sqrt{3}$，即大于$\varepsilon$，所以球面上任一点至少属于这六个曲面片之一，故$\overline{U}_1,\overline{U}_2,\cdots,\overline{U}_6$覆盖整个球面. 相容性条件(2)是不难验证的. 因而球面符合曲面的定义.

更一般地说，设$F(x^1,x^2,x^3)$是定义在$\mathbf{E}^3$上的C^k阶函数，M是满足

$$F(x^1,x^2,x^3)=0$$

的点所成的集合(假定它为非空). 如果对于每一点$x\in M$，F_{x^1}，F_{x^2}，F_{x^3}不全为零，那么M一定是一个曲面. 事实上，设$x_0=(x_0^1,x_0^2,x_0^3)\in M$，不妨设$F_{x^3}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)\neq 0$，那么由隐函数存在定理知道，一定存在$x_0$的一个邻域$V$和$(x_0^1,x_0^2)$的一个平面开邻域$\overline{U}$和一个$C^k$阶函数$f(x^1,x^2)$，使得$V\subset M$的点可表为

$$(x^1,x^2,f(x^1,x^2)),\quad (x^1,x^2)\in\overline{U},$$

因此符合曲面定义的要求.

由此可见，正则的二次曲面(椭球面、单叶和双叶的双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面等)都是光滑曲面，但二次锥面不是光滑曲面，因为它在顶点附近，不能与平面开邻域同胚，此外，在顶点处，可微性被破坏了.

对于整体曲面M，它是$\mathbf{E}^3$的一个子集，故若干拓扑概念也都可以引用(见附录A).

(1) **连通性**　若曲面M不能表为两个不相交的非空开集之并，则M称为连通的. C^k阶曲面可以是连通的，如球面、单叶双曲面等；也可以是不连通的，如双叶双曲面. 一般若无特殊说明，以后我们总是研究连通的曲面.

(2) **单连通性**　若曲面M上任意一条闭曲线都可以在其上连续收缩为一点(直观地说是M上没有洞)，则称M是单连通的. 若M上一个区域$\Omega\subset M$具有单连通性质，则称Ω是M上的一个

单连通区域.

(3) **紧致性**　如果曲面M在$\mathbf{E}^3$中是一个有界闭集，则称M为紧致的. 根据欧氏空间点集拓扑知识，紧致曲面有下列等价定义：

(Ⅰ)M上的任何无限点列均有极限点(属于M).

(Ⅱ)M上的任一开覆盖都有有限子覆盖. 这意味着M可用有限个曲面片来覆盖. 例如，球面、环面都是紧致的，平面则不是紧致的. 注意，根据上述整体曲面的定义，以后我们所说的紧致曲面总是没有边界的，为强调这一点，有时也称之为紧致闭曲面.

(4) **完备性**　曲面上第一基本形式给出了它的一个度量. 所谓完备性，就是它作为二维度量空间是完备的，关于它的等价定义，我们将在第四章 §3 中详细论述. 因此，紧致曲面一定是完备的，但完备曲面未必紧致. 在完备曲面上，测地线可以无限延长，这对于曲面的整体研究是一个最适宜的条件.

在曲面的整体描述中，还有一个重要概念就是曲面的定向性.

定义　若曲面M上给出一个连续变化的法向量场，使得当这个法向量沿M上任何闭曲线移动一周时，它的正向不改变(即仍回到出发时的位置)，则称曲面M是可定向的；否则称为不可定向的.

因为曲面上任一局部邻域都同胚于一个平面开邻域，所以每张曲面的局部总是可定向的，但是，就整个曲面来说，情况未必如此. 例如，球面、环面是整体可定向的，而著名的 Möbius 带则是整体不可定向的.

在覆盖M的每个曲面片M_λ上，其法向量一般由$n_\lambda=\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\lambda^1}\times\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\lambda^2}$决定. 在$M_\lambda\cap M_\mu\neq\varnothing$处，法向量的变换公式是

$$n_\mu=\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\mu^1}\times\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\mu^2}=\frac{\partial(u_\lambda^1,u_\lambda^2)}{\partial(u_\mu^1,u_\mu^2)}\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\lambda^1}\times\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\lambda^2}=\frac{\partial(u_\lambda^1,u_\lambda^2)}{\partial(u_\mu^1,u_\mu^2)}n_\lambda,$$

其中$\partial(u_\lambda^1,u_\lambda^2)/\partial(u_\mu^1,u_\mu^2)$是坐标变换的 Jacobi 矩阵. 为使法向量不

改变方向，只需 $\det \dfrac{\partial(u_\lambda^1, u_\lambda^2)}{\partial(u_\mu^1, u_\mu^2)} > 0$. 因此，可定向曲面 M 的一个等价定义是：M 上存在一坐标图集 $\{(M_\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda\in L}$，使所有坐标变换的 Jacobi 矩阵的行列式都取正值. 对于紧致曲面，我们有下列定理.

定理 1.1 $\mathbf{E}^3$ 中每张紧致曲面都是(整体地)可定向的.

证明 用反证法. 假设 $\mathbf{E}^3$ 中紧致曲面 M 是不可定向的，即 M 上存在一(光滑)回路 C 使得当 M 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 沿 C 移动一周时，$\boldsymbol{n}$ 的方向被反过来. 我们在 C 的每点，沿 $\boldsymbol{n}$ 的正向在 $\boldsymbol{n}$ 上截取适当小 ε 的一段，则端点的轨迹是 $\mathbf{E}^3$ 中一简单闭曲线 Γ(可以使它是光滑的). 因为 $\boldsymbol{n}$ 沿 C 移动一周时从 M 的一侧转到另一侧，故 Γ 恰好与 M 相交于一点 x_0，并且可假定在 x_0 点 Γ 与 M 横截(即 Γ 与 M 在 x_0 不相切)，否则只要调整 ε 即可. 由于 Γ 可收缩为一点，因此存在从 $\mathbf{E}^2$ 中闭圆盘 D 到 $\mathbf{E}^3$ 的光滑映射 $\varphi: D \to \mathbf{E}^3$ 使得 D 的边界 S^1 被 φ 映为 Γ(参考图 Ⅱ-15(a))，即 $\Gamma = \varphi(S^1)$.

因为 M 是紧致的(当然是闭的)，我们可以使 φ 横截 M，即在 $\varphi(D) \cap M$ 处，$\varphi(D)$ 与 M 不相切①. 这在 S^1 上已经做到了，即 Γ 与 M 横截. 根据横截性的主要性质，逆像 $\varphi^{-1}(M \cap \varphi(D))$ 或是位于 D 内部(即不包含 S^1)的若干互不相交的简单闭曲线，或是两个(不同)端点在 S^1 上的光滑弧段. 但 $\varphi^{-1}(M \cap \Gamma)$ 与 S^1 只有一个交点，因而得到矛盾. 定理证毕.

注 上述证明引自 H. Samelson 文(Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 22:301 ~ 302). 定理对高维欧氏空间 $\mathbf{E}^m$ 中的超曲面 M 也成立，而且只要求 M 是欧氏空间中的嵌入闭子集(不一定要求紧致).

1.2 Gauss-Bonnet 公式

① 参考 J. Milnor. Differential Topology, Lect. Notes, Princeton: Princeton Univ., 1959 [中译本:熊金城译. 从微分观点看拓扑. 上海:上海科技出版社,1983].

设 M 是可定向曲面，$\Omega\subset M$ 是 M 上的单连通紧致区域，其边界为 $\partial\Omega$.

沿曲线 $\partial\Omega$，其测地曲率可表示为（见第一章，公式(3.28)）

$$k_g\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta+\omega_1^2, \tag{1.1}$$

其中 s 是 $\partial\Omega$ 的弧长参数，规定 $\partial\Omega$ 的正向如下：当我们按正向沿曲线 $\partial\Omega$ 运动时，区域 Ω 总在左边（如图 Ⅲ-1）. 把(1.1)式沿 $\partial\Omega$ 积分，得

$$\int_{\partial\Omega}k_g\mathrm{d}s=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\theta+\int_{\partial\Omega}\omega_1^2. \tag{1.2}$$

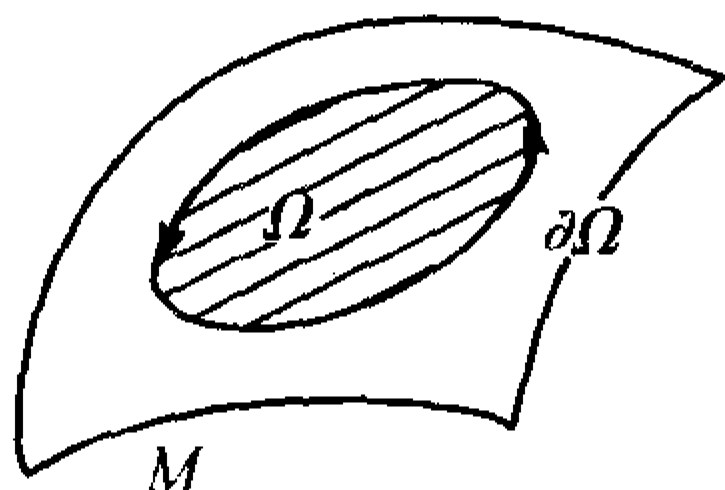


图 Ⅲ-1

为了计算上式右边的第一个积分，我们可把单连通区域 Ω 经过连续映射变换成平面上的一个单连通区域，$\partial\Omega$ 变成平面简单闭曲线. 因为这个积分的值在变换过程中只能连续地变化，由切线旋转指标定理（第二章，§1.2），易得

$$\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

对于(1.2)右边的第二个积分，我们应用 Stokes 公式，得

$$\int_{\partial\Omega}\omega_1^2=\iint_{\Omega}\mathrm{d}\omega_1^2=-\iint_{\Omega}K\omega^1\wedge\omega^2=-\iint_{\Omega}K\mathrm{d}A,$$

其中 $\mathrm{d}A$ 是曲面的面积元. 把这些关系式代入(1.2)，最后便得曲面上单连通区域的 Gauss-Bonnet 公式.

$$\iint_{\Omega}K\mathrm{d}A+\int_{\partial\Omega}k_g\mathrm{d}s=2\pi. \tag{1.3}$$

如果边界 $\partial\Omega$ 由曲面上一条分段光滑的简单曲线组成，即由有限段光滑曲线 $C_1,C_2,\cdots$ 所组成，它们除连接点外没有其他交点. $\partial\Omega$ 的切向量在这些光滑曲线段的连接点处有“跳跃”—— 外角. 设在交点 A_i 处的外角是 θ_i（见图 Ⅲ-2），θ_i 可正也可负，它的符号由曲面的定向决定：当 $T(A_i-0)$ 到 $T(A_i+0)$ 的方向与 M 的定向一

致时，则 θ_i 为正；反之为负（见图 Ⅲ-2）. 因此，

$$-\pi \leqslant \theta_i \leqslant \pi.$$

这时，显然有

$$\int_{\partial\Omega} k_g \mathrm{d}s = \sum_i \int_{C_i} k_g \mathrm{d}s,$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = \sum_i \int_{C_i} \mathrm{d}\theta_i = 2\pi - \sum_i \theta_i.$$

因此，(1.2) 化为

$$\iint_{\Omega} K \mathrm{d}A + \sum_i \int_{C_i} k_g \mathrm{d}s + \sum_i \theta_i = 2\pi. \tag{1.4}$$

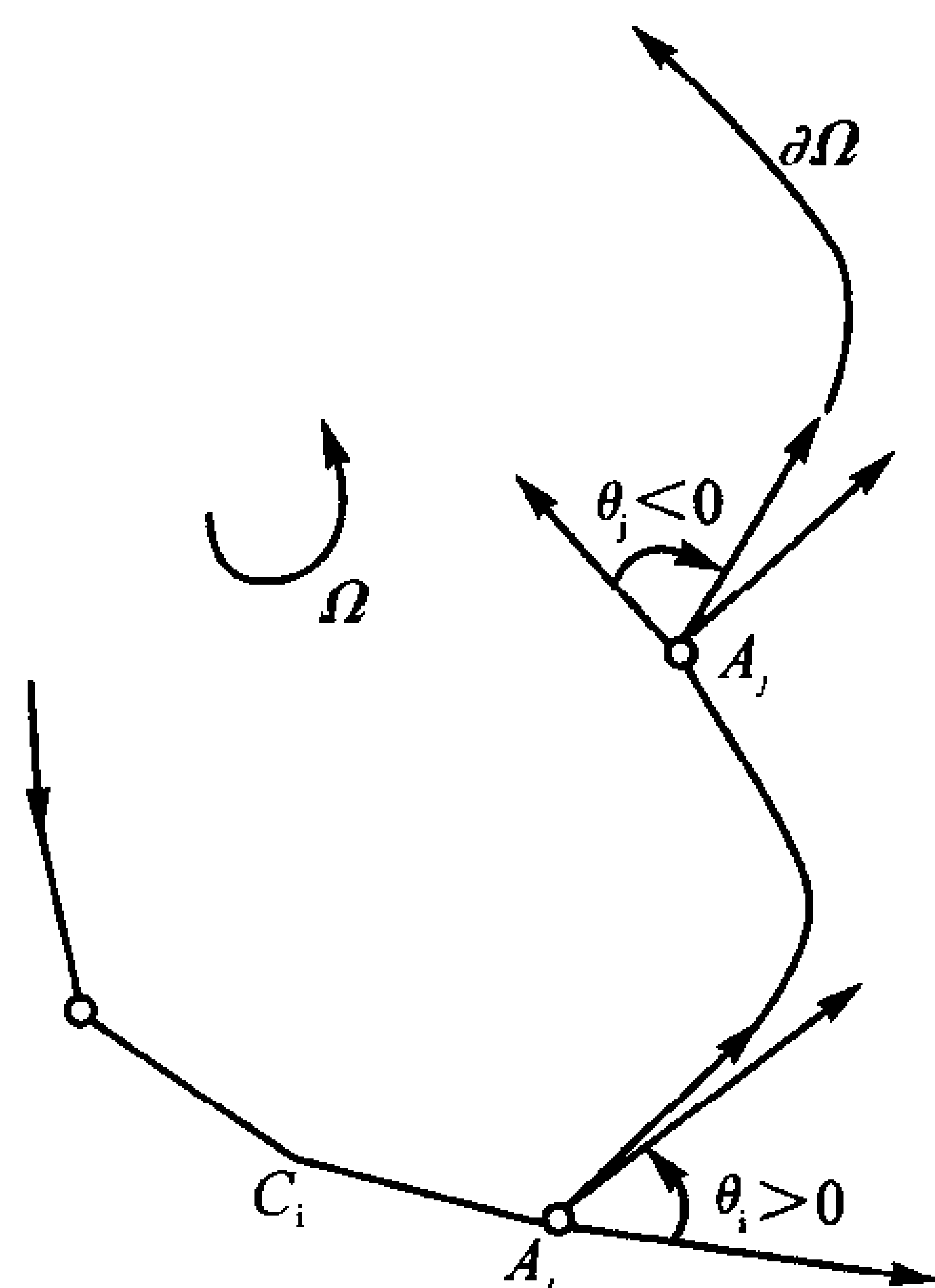
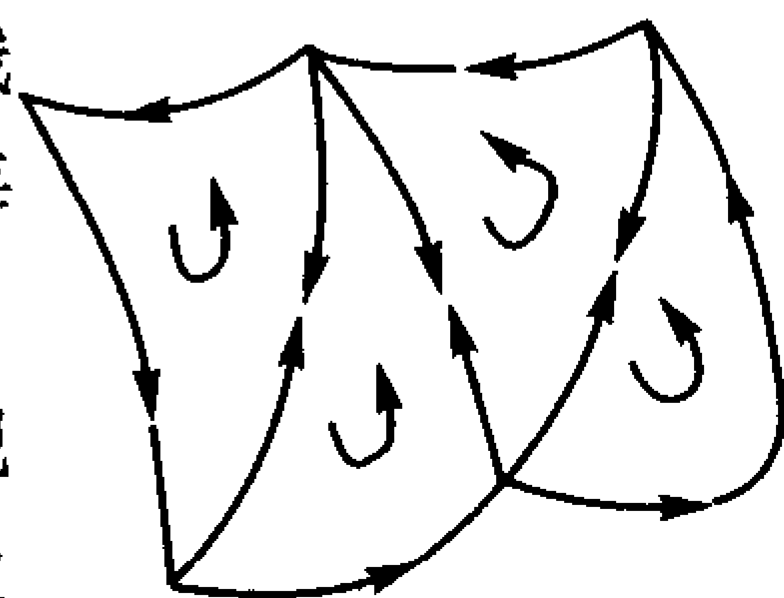


图 Ⅲ-2

现设 Ω 是曲面 M 上的任一紧致区域，它的边界由互不相交的 m 条简单的分段光滑闭曲线 Γ_i 组成，由拓扑学知，这样的区域 Ω 可以三角剖分，即把 Ω 分割成许多以三条曲线段为边的单连通的曲面三角形，使得每个三角形都落在 M 的一个坐标邻域内. 对于定向曲面，我们可以以右手法则规定每个三角形边界的正向，区域内部边界的定向刚好分别取得一次正向和一次负向（见图 Ⅲ-3）. 经过这样的剖分后，我们得到三个数：F—— 三角形的个数；E—— 边的条数；V—— 顶点数. 它们确定了区域 Ω 的 Euler-Poincarè **示性数**（见附录 B）


图 Ⅲ-3

$$\chi(\Omega) = F - E + V. \tag{1.5}$$

这个数与三角剖分的方式无关，是曲面的拓扑不变量.

现在对每个单连通的曲面三角形应用公式(1.4)，再把所得的结果逐项相加，并利用下述事实：区域 Ω 内部的每一条边上恰好按

正反方向各积分一次，因而互相抵消. 我们得

$$\iint_{\Omega} K\mathrm{d}A + \sum_i \int_{\Gamma_i} k_g \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3}\theta_{jk} = 2\pi F, \tag{1.6}$$

式中 F 表示 Ω 中的三角形个数，$\theta_{j1},\theta_{j2},\theta_{j3}(j=1,\cdots,F)$ 是第 j 个三角形的三个外角，见图 Ⅲ-4.

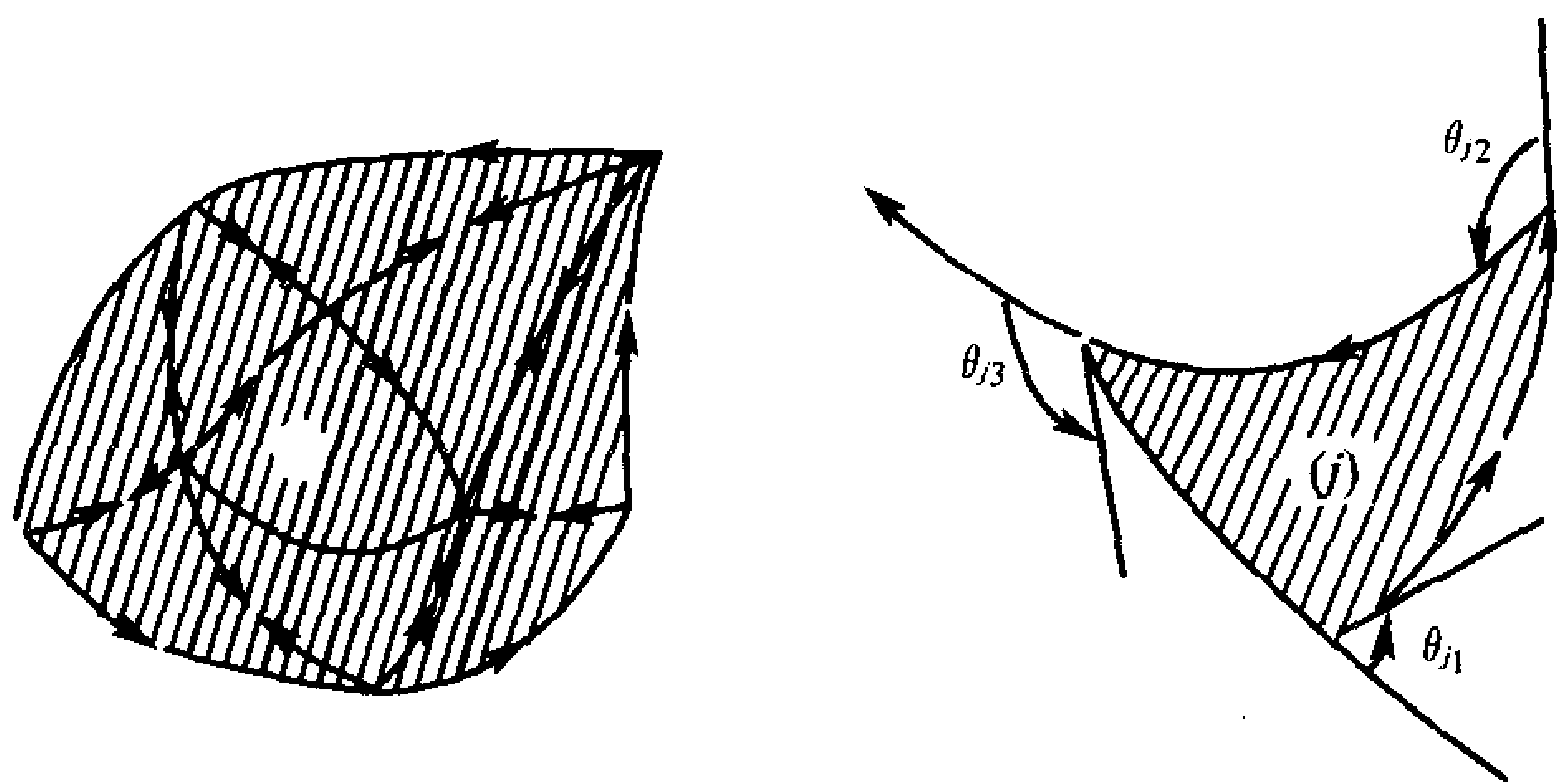


图 Ⅲ-4

记 $\alpha_{jk}=\pi-\theta_{jk}(k=1,2,3)$ 是第 j 个三角形的三个内角，于是

$$\sum_{j,k}\theta_{jk} = \sum_{j,k}\pi - \sum_{j,k}\alpha_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k}\alpha_{jk}.$$

再引入记号

E_e = 落在 Ω 边界上边的总数；

E_I = 落在 Ω 内部的边的总数；

V_e = 落在 Ω 边界上的顶点总数；

V_I = 落在 Ω 内部的顶点总数.

因为任一曲线 Γ_i 都是闭的，因此我们有 $E_e = V_e$. 不难验证，

$$3F = 2E_I + E_e.$$

因此

$$\sum_{j,k}\theta_{jk} = 2\pi E_I + \pi E_e - \sum_{j,k}\alpha_{jk}.$$

$\partial\Omega$ 上的顶点可分为两部分：一部分是原来 Γ_i 的顶点，它的总数记为 V_{ec}；另一部分是由剖分产生的其他顶点，其总数记为 V_{et}，显然 $V_e = V_{ec} + V_{et}$. 对 V_{et} 来说，内角之和为 π，而对于剖分中任一内部顶点来说，内角之和为 2π. 因此，可算得

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}\theta_{jk} &= 2\pi E_I + \pi E_e - 2\pi V_I - \pi V_{et} - \sum_i(\pi - \theta_i) \\ &= 2\pi E_I + 2\pi E_e - 2\pi V_I - \pi E_e - \pi V_e + \sum_i\theta_i \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_i\theta_i.\end{aligned}$$

把上式代入(1.6)，便得

$$\iint_\Omega K\mathrm{d}A + \sum_i\int_{\Gamma_i}k_g\mathrm{d}s + \sum_i\theta_i = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(\Omega). \tag{1.7}$$

这就是关于曲面上任何带边界紧致区域的**整体 Gauss-Bonnet 公式**. 对于单连通区域，$\chi(\Omega) = 1$，(1.7) 化为(1.4).

对于整个紧致闭曲面，仍然可以作三角剖分，但已没有边界曲线. 如图 Ⅲ-5 所示.

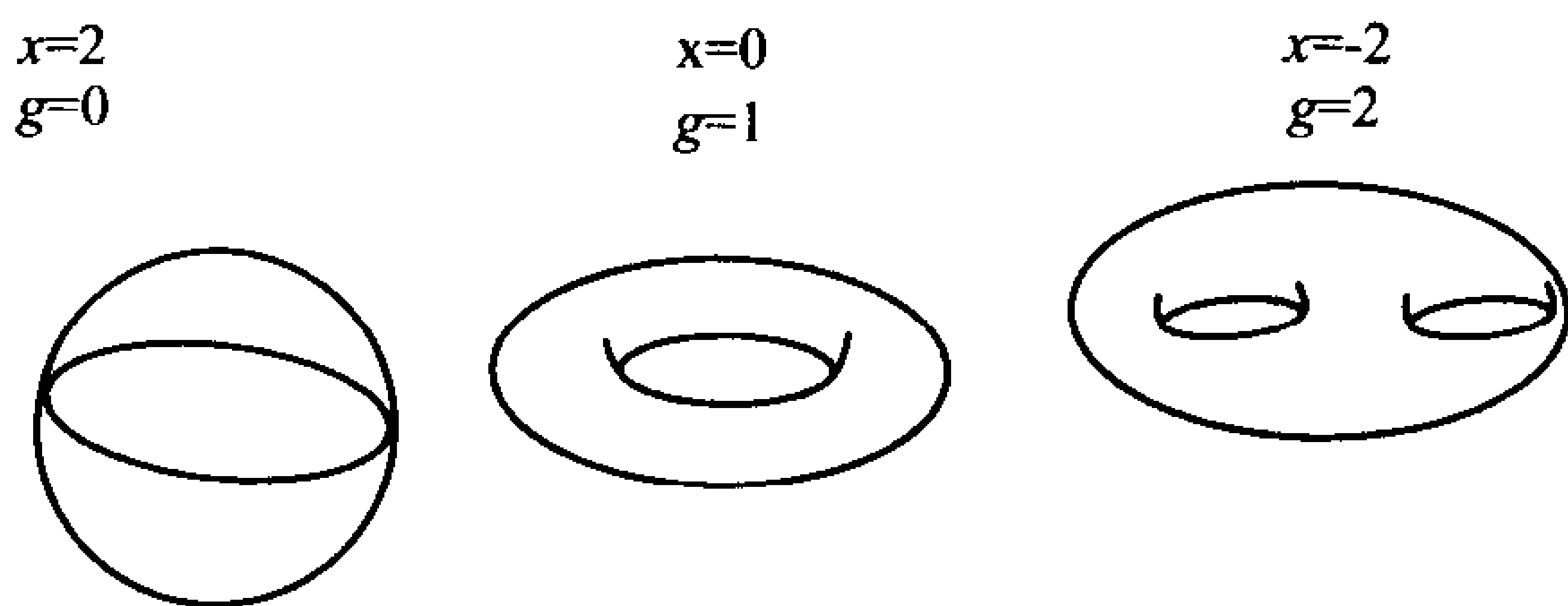


图 Ⅲ-5

球面：$\chi = 2$；环面：$\chi = 0$；两个洞的紧致曲面：$\chi = -2$；…；g 个洞的紧致曲面：$\chi = 2(1 - g)$. 由拓扑学知，任何定向的紧致闭

曲面，其 Euler-Poincarè 示性数只能取值 $2, 0, -2, \cdots, -2g, \cdots$，而且示性数相等的紧致曲面互相同胚. 因此，$\chi$ 就给出了定向的紧致闭曲面的完全拓扑分类(详见附录B). 数 $g = \frac{1}{2}[2 - \chi(s)]$ 称为曲面 M 的亏格，即 M 包含的洞的个数. 因此亏格 g 也是一个拓扑不变量. 于是

$$\chi(s) = 2(1 - g). \tag{1.8}$$

对于整个定向的紧致曲面 M 来说，(1.7) 中不出现边界曲线及外角 θ_i，所以有

定理 1.2 设 M 是紧致定向闭二维曲面，则成立下列 Gauss-Bonnet 公式：

$$\iint_M K \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1 - g), \tag{1.9}$$

其中 K 是 M 的 Gauss 曲率，$\chi(M)$ 是 Euler-Poincarè 示性数，g 是 M 的亏格.

注意，在这个著名的 Gauss-Bonnet 公式(1.9) 中，右边是 M 的拓扑不变量；左边是 M 的内蕴几何不变量，称为曲面 M 的全曲率. 公式(1.9) 把两者联系了起来，因此是整体微分几何学中十分重要的公式之一. 由于全曲率完全是曲面的内蕴性质，因此，公式(1.9) 对任何定向的紧致二维黎曼流形都成立，即与外围欧氏空间无关(见第四章). 由定理 1.2 还可得下述推论.

推论 1.3 若紧致定向曲面 M 的 Gauss 曲率非负，但不恒为零，则 M 必同胚于球面.

证明 由(1.9)

$$2\pi\chi(s) = \iint_M K \mathrm{d}A > 0,$$

所以 $\chi(s) = 2, g(s) = 0$. 因此，M 必与球面同胚.

习　　题

1.(**Jacobi 定理**) 设 $C: x = x(s)$ 是一条曲率非零的正则空间闭曲线,它的弧长参数为 s;又设 C 的主法线像 $N(s)$ 是单位球面 S^2 上的简单闭曲线,它的弧长参数为 $\bar{s}$,试证:

(Ⅰ) $\left(\dfrac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = 1/(k^2+\tau^2)$,其中 k 和 τ 是曲线 C 的曲率和挠率;

(Ⅱ) 曲线 $N(s)$ 的测地曲率 $\bar{k}_g = \dfrac{d}{ds}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)\dfrac{ds}{d\bar{s}}$;

(Ⅲ) 曲线 $N(s)$ 把 S^2 分成面积相等的两部分.

2. 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中亏格为零的闭曲面,$C \subset M$ 是 M 上的简单闭测地线,设 A 和 B 是 M 上以 C 为公共边界的区域,$N: M \to S^2$ 是 M 的 Gauss 映射. 试证:$N(A)$ 和 $N(B)$ 面积相等.

3. 验证 1.1 中覆盖球面的 6 个曲面片 $\{\overline{U}_\lambda\}$,$\lambda = 1,\cdots,6$,满足相容性条件(2).

4. 证明 $\mathbf{E}^3$ 中 Gauss 曲率非负的紧致闭曲面必同胚于球面.

5. 设 M 是 E^3 中亏格非零的紧致曲面,试证:M 上必存在点使它的 Gauss 曲率分别为正、负和零.

§2　Liebmann 定理

2.1　球面的刚性

曲面的整体性定理的一个简单典型例子是 $\mathbf{E}^3$ 中球面的刚性. 所谓球面的刚性,意即:设 $\varphi: S^2 \to M$ 是球面 $S^2 \subset \mathbf{E}^3$ 到曲面 $M = \varphi(S^2) \subset \mathbf{E}^3$ 上的等距对应,则 M 本身必为球面. 直观上,这意味着要把球面作无伸缩的弯曲变形是不可能的.

我们将证明下面的

定理 2.1(H. Liebmann,1899)　设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中 Gauss 曲率 K 为常数的紧致连通闭曲面,则 M 必为标准球面.

由上述定理即得球面的刚性.事实上,设 $\varphi: S^2 \to M$ 是球面 S^2 到 M 上的等距对应,因为 Gauss 曲率在等距对应下是不变的,故 $\varphi(S^2) = M$ 就有常数 Gauss 曲率,而且由于球面是紧致连通的,故它的连续像 M 也是紧致连通的.于是,由 Liebmann 定理,M 也必是球面.

应该指出,存在与球面同胚但不是刚性的闭曲面,下图就给出一个例子.我们用往里"撞击"的方法把图中曲面 M 的平面区域 P 换掉,使得变形的 M' 仍是正则的.用"对称撞击"的方法可得另一与 M' 等距的曲面 M'',但不存在 $\mathbf{E}^3$ 中的刚性运动可使 M' 变成 M''.因此,M' 不具有刚性(见图 Ⅲ-6,引自[3],§5-2).

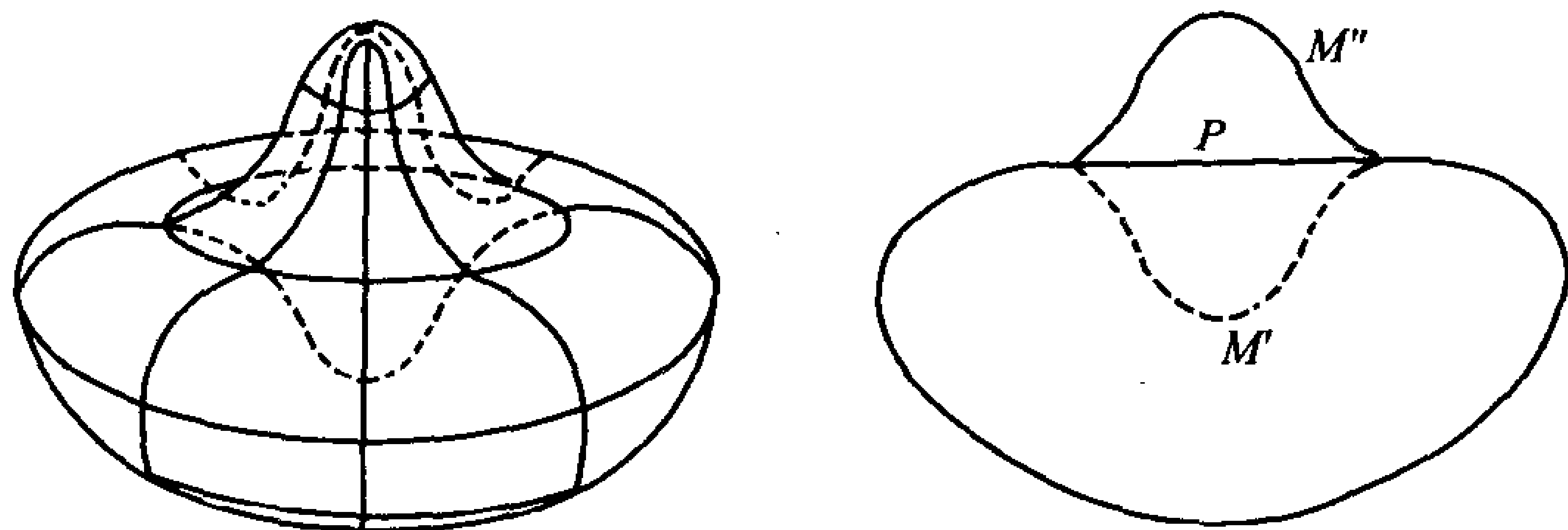


图 Ⅲ-6

以下,我们先证明两个引理,然后完成定理 2.1 的证明.

2.2　两个引理

引理 2.2　$\mathbf{E}^3$ 中紧致闭曲面 M 上至少有一个椭圆点(Gauss 曲率为正).

证明　设 $M \subset \mathbf{E}^3$ 的位置向量为 x,考虑函数

$$f = x \cdot x = |x|^2. \tag{2.1}$$

显然，f 是 M 上的可微函数. 由于 M 是紧致的，f 必在某一点 $x_0 \in M$ 达到极大值，从而

$$\mathrm{d}f(x_0) = 0, \quad \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x_0) \leqslant 0. \tag{2.2}$$

注意，上面的第二式左边是两次普通微分，不是外微分.

在 x_0 点附近，取双参数幺正活动标架 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$，使 e_3 为 M 的法向量场. 由(2.1) 易得

$$\mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x = 2(x \cdot e_\alpha)\omega^\alpha \quad (\alpha = 1,2),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= (\mathrm{d}x \cdot e_\alpha + x \cdot \mathrm{d}e_\alpha)\omega^\alpha + (x \cdot e_\alpha)\mathrm{d}\omega^\alpha \\ &= \sum_\alpha (\omega^\alpha)^2 + (x \cdot e_3)\omega_\alpha^3\omega^\alpha + (x \cdot e_\beta)\omega_\alpha^\beta\omega^\alpha \\ &\quad + (x \cdot e_\alpha)\mathrm{d}\omega^\alpha \quad (\alpha, \beta = 1,2).\end{aligned}$$

因此，(2.2) 等价于

$$(x \cdot e_\alpha)\big|_{x_0} = 0 \quad (\alpha = 1,2),$$

$$\Big[\sum_\alpha (\omega^\alpha)^2 + (x \cdot e_3)(\omega_1^3\omega^1 + \omega_2^3\omega^2)\Big]\Big|_{x_0} \leqslant 0. \tag{2.3}$$

注意到 $\omega_1^3\omega^1 + \omega_2^3\omega^2$ 是 M 的第二基本形式 Ⅱ（见第一章，(3.24)），而第一基本形式 $\mathrm{I} = \sum_\alpha (\omega^\alpha)^2$ 是正定的，因此，(2.3) 的第二式化为

$$(x \cdot e_3)\big|_{x_0} \mathrm{II}(x_0) < 0. \tag{2.4}$$

因为(2.3) 的第一式表明，在 x_0 点位置向量 x_0 与 e_3 平行，故 $(x \cdot e_3)\big|_{x_0} \neq 0$，这样，(2.4) 意味着

$$\mathrm{II}(x_0) < 0 \ (\text{或} > 0),$$

即 M 的第二基本形式在 x_0 点是有定的（正定或负定）. 因此，在 x_0 点 M 的法曲率都非零同号，从而作为两主曲率之积的 Guass 曲率 $K(x_0) > 0$. 证毕.

现在我们约定：对 $\mathbf{E}^3$ 中曲面 M 上的任一点 x 处的两个主曲率 $k_1(x)$ 和 $k_2(x)$ 总设 $k_1(x) \geqslant k_2(x)$，这样，k_1 和 k_2 都是 M 上的连续

函数，而且除脐点($k_1 = k_2$)外，它们也是 M 上的可微函数.

引理 2.3(D. Hilbert) 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中正则曲面，$x_0 \in M$ 是满足下列条件的点：

(Ⅰ)$K(x_0) > 0$，即 x_0 点的 Gauss 曲率为正；

(Ⅱ)在 x_0 点，函数 k_1 达到极大值而 k_2 达到极小值，

则 x_0 必是 M 的脐点.

证明 先回忆 Gauss 曲率 K 的一种表示，由第一章(3.22)，

$$\omega_1^2 = p\omega^1 + q\omega^2, \tag{2.5}$$

对上式两边外微分，利用第一章的(3.31)，得

$$-K\omega^1 \wedge \omega^2 = \mathrm{d}p \wedge \omega^1 + \mathrm{d}q \wedge \omega^2 + p\mathrm{d}\omega^1 + q\mathrm{d}\omega^2.$$

若令

$$\mathrm{d}p = p_\alpha\omega^\alpha, \quad \mathrm{d}q = q_\alpha\omega^\alpha \quad (\alpha, \beta = 1,2),$$

则从上式和结构方程，可得

$$-K\omega^1 \wedge \omega^2 = (q_1 - p_2 + q^2 + p^2)\omega^1 \wedge \omega^2,$$

即

$$K = p_2 - q_1 - p^2 - q^2. \tag{2.6}$$

现用反证法证明引理 2.3. 设 x_0 不是 M 的脐点，则存在 x_0 的一个邻域 $U \subset M$，使 U 上的点都不是脐点. 于是，在 U 上可取曲率线参数网 (u,v)；再取 $e_1 = x_u/|x_u|, e_2 = x_v/|x_v|$，使它们分别为对应于主曲率 k_1 和 k_2 的主方向. 在这样的活动标架下，我们有

$$\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v, \tag{2.7}$$

$$\omega_1^3 = k_1\omega^1, \quad \omega_2^3 = k_2\omega^2. \tag{2.8}$$

对(2.8)两边外微分. 利用第二章(2.3)式

$$\mathrm{d}\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1, \quad \mathrm{d}\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \quad \mathrm{d}\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3, \tag{2.9}$$

结合(2.5)、(2.8)，不难得到

$$\begin{cases}[\mathrm{d}k_1 - (k_1 - k_2)p\omega^2] \wedge \omega^1 = 0, \\ [\mathrm{d}k_2 - (k_1 - k_2)q\omega^1] \wedge \omega^2 = 0.\end{cases} \tag{2.10}$$

设

$$\mathrm{d}k_1 = k_{11}\omega^1 + k_{12}\omega^2 = k_{11}\sqrt{E}\,\mathrm{d}u + k_{12}\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}k_2 = k_{21}\omega^1 + k_{22}\omega^2 = k_{21}\sqrt{E}\,\mathrm{d}u + k_{22}\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,$$

则从(2.10)可得

$$\begin{aligned} k_{12} &= (k_1 - k_2)p, \\ k_{21} &= (k_1 - k_2)q, \end{aligned} \tag{2.11}$$

并且

$$\begin{cases} (k_1)_v = \dfrac{\partial k_1}{\partial v} = k_{12}\sqrt{G} = (k_1 - k_2)p\sqrt{G}, \\ (k_2)_u = \dfrac{\partial k_2}{\partial u} = k_{21}\sqrt{E} = (k_1 - k_2)q\sqrt{E}. \end{cases} \tag{2.12}$$

按引理条件(Ⅱ)，$(k_1)_v(x_0) = (k_2)_u(x_0) = 0$，又 $k_1 > k_2$，故从(2.12)得

$$p(x_0) = q(x_0) = 0. \tag{2.13}$$

另一方面，利用(2.7)，易知

$$p_v = p_2\sqrt{G}, \quad q_u = q_1\sqrt{E}.$$

对(2.12)两边求偏导数，利用上式和(2.13)，得在 x_0 点处有

$$\begin{cases} (k_1)_{vv}(x_0) = [(k_1 - k_2)Gp_2]|_{x_0}, \\ (k_2)_{uu}(x_0) = [(k_1 - k_2)Eq_1]|_{x_0}. \end{cases} \tag{2.14}$$

再利用条件(Ⅱ)，我们有 $(k_1)_{vv}(x_0) \leqslant 0$，$(k_2)_{uu}(x_0) \geqslant 0$，故(2.14)意味着

$$p_2(x_0) \leqslant 0, \quad q_1(x_0) \geqslant 0. \tag{2.15}$$

根据(2.13)和(2.15)，从(2.6)便得 $K(x_0) \leqslant 0$. 这与引理条件(Ⅰ)矛盾. 所以，x_0 必是 M 的脐点. 证毕.

2.3 Liebmann 定理的证明

现在证明 Liebmann 定理. 因为 M 是紧致的，由引理 2.2，M 上

至少有一点使 $K>0$，但 $K=\text{const.}$，因此在整个 M 上 $K>0$；又由于 M 的紧致性，连续函数 k_1 在 M 的某点 x_0 处达到最大值. 从 $k_1 \cdot k_2 = K = \text{const.} > 0$，可见在 x_0 点 k_2 将达到最小值. 于是，根据引理 2.3，$k_1(x_0)=k_2(x_0)$，对于 M 上任何点 $x \in M$，我们有

$$k_1(x_0) \geqslant k_1(x) \geqslant k_2(x) \geqslant k_2(x_0) = k_1(x_0).$$

所以，M 上每点都是脐点，且是椭圆点. 由熟知的定理，M 必是球面的一部分. 因为 M 是连通的，故 M 属于同一球面 S^2；又由于 M 紧致，故 M 是 S^2 中的闭集，而 M 显然又是 S^2 的开集，所以 M 本身就是整个球面 S^2. 定理 2.1 证毕.

定理 2.1 是整体微分几何的一个典型结果. 就是说，一些局部的几何量(这里是 Gauss 曲率) 的信息加上某些拓扑条件(这里是紧致性和连通性)，可以推出整个曲面很强的限制(这里断言必为球面). 注意，连通性的作用是防止定理 2.1 结论中出现两个或多个球面；紧致性则是保证我们得到整个球面，而不是球面的一部分.

在定理 2.1 的证明过程中，$k_1 \cdot k_2 = K = \text{const.}$ 的假设，主要用来保证 k_2 是 k_1 的递减函数，我们可以考虑更一般的情况.

定义　主曲率 k_1 和 k_2 满足一个函数关系 $F(k_1,k_2)=0$ 的曲面称为 **Weingarten** 曲面，简称 W 曲面.

我们总假定 $\dfrac{\partial F}{\partial k_1} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial k_2} \neq 0$，由 $F(k_1,k_2)=0$，得

$$\frac{\partial F}{\partial k_1}\mathrm{d}k_1 + \frac{\partial F}{\partial k_2}\mathrm{d}k_2 = 0.$$

不妨设 $\dfrac{\partial F}{\partial k_2} \neq 0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}k_1} = -\frac{\partial F}{\partial k_1}\bigg/\frac{\partial F}{\partial k_2}.$$

因此，$\dfrac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}k_1} \leqslant 0$ 等价于

$$\frac{\partial F}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial k_2} \geqslant 0. \tag{2.16}$$

满足(2.16)的 W 曲面称为**椭圆型的**. 这样，由定理 2.1 的证明过程易得

推论 2.4 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通的椭圆型 W 曲面，它的 Gauss 曲率为正，则 M 必是球面.

显然，平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ 为常数就是椭圆型 W 曲面的一例. 因此，我们就有

推论 2.5 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中平均曲率为常数的紧致连通闭曲面，它的 Gauss 曲率为正，则 M 是球面.

由 Gauss-Bonnet 定理，Gauss 曲率为正的紧致曲面是同胚于球面的，即是单连通的. 在推论 2.5 中，可把 Gauss 曲率为正的假设换成 M 是单连通的，而同样结论成立. 这就是著名的 Hopf 定理. 它的证明将在后面 §10 中给出.

习 题

1. 设 $M \subset \mathbf{E}^3$ 是 Gauss 曲率 $K > 0$ 且无脐点的曲面，证明：M 上使平均曲率 H 达到极大而同时 K 达到极小的点是不存在的.

2. 设 $C: x(s) = (0, \varphi(s), \psi(s))$ 是以弧长 $s \in [0, l]$ 为参数的正则平面曲线，这里 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi'(0) = 1, \varphi'(l) = -1$ 且 $\varphi(s) > 0$. M 是 C 绕 z 轴旋转一周而得的曲面，试证：

(Ⅰ) M 的 Gauss 曲率 $K = -\dfrac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$;

(Ⅱ) $\int_0^l K'\varphi^2 \mathrm{d}s = 0$;

(Ⅲ) $\mathbf{E}^3$ 中不存在曲率是单调增加的上述旋转曲面.

3. 详细证明推论 2.4.

§ 3　凸曲面和积分公式

3.1　凸曲面的 Hadamard 定理

定义　若曲面 M 的 Gauss 曲率处处为正，则称 M 为凸曲面，一个紧致的凸闭曲面称为卵形面.

对于卵形面，我们有下面的

定理 3.1（Hadamard 定理）　卵形面 M 的 Gauss 映射 $\mathscr{T}: M \to S^2$ 是 M 到 S^2 上的一一映射，即 $\mathscr{T}$ 既是满射，又是单射.

证明　设 $M \subset \mathbf{E}^3$ 是卵形面，对于 M 上任一局部坐标邻域 (u, v)，设 $x(u,v)$ 是 M 的位置向量，$n(u,v)$ 是它的单位法向量. 因为卵形面是紧致的，因此是可定向的，从而 n 可完全确定. 因为

$$n_u \times n_v = K(x_u \times x_v),$$

故当 $K > 0$ 时，Gauss 映射 $\mathscr{T}: M \to S^2$ 的 Jacobi 处处不为零，即 $\mathscr{T}$ 是局部一一的. 这样 $\mathscr{T}$ 是开映射，$\mathscr{T}(M)$ 是 S^2 的开子集. 另一方面，M 是紧致的，$\mathscr{T}(M)$ 是 S^2 的紧致子集，故它也是闭的，即 $\mathscr{T}$ 又是闭映射. 所以 $\mathscr{T}$ 是满射，即 $\mathscr{T}(M) = S^2$.

现在证明 $\mathscr{T}$ 又是单射. 用反证法，设 $\mathscr{T}$ 不是单射，于是存在点 $p, q \in M, p \neq q$，使得 $\mathscr{T}(p) = \mathscr{T}(q)$. 根据 $\mathscr{T}$ 是开映射，可以选取 S^2 上包含 $\mathscr{T}(p) = \mathscr{T}(q)$ 的充分小邻域 W，使得它对应于 M 上 p 的一个邻域 U 和 q 的一个邻域 V，$U \cap V = \varnothing$，而且 $\mathscr{T}(U) = \mathscr{T}(V) = W$. 这时，若从 M 上除去 V 的点，则 $M - V$ 在 $\mathscr{T}$ 下的像仍是整个 S^2. 因此

$$\iint_{M-V} K\mathrm{d}A = \iint_{\mathscr{T}(M-V)} \mathrm{d}\widetilde{A} = \iint_{S^2} \mathrm{d}\widetilde{A} = 4\pi,$$

其中 $\mathrm{d}A$ 是 M 的面积元；$\mathrm{d}\widetilde{A}$ 是 S^2 的面积元.

另一方面，卵形面显然同胚于球面，这可从 Gauss-Bonnet 公

式看到. 于是

$$\iint_M K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(M) = 4\pi.$$

由以上两式得

$$4\pi = \iint_M K\mathrm{d}A = \iint_{(M-V)} K\mathrm{d}A + \iint_V K\mathrm{d}A > \iint_{M-V} K\mathrm{d}A = 4\pi.$$

这就得到矛盾,所以 $\mathscr{T}$ 是单射.

利用上述 Hadamard 定理,便可得凸曲面的下列几何性质.

命题 3.2 卵形面 $M \subset \mathbf{E}^3$ 总是位于其上每点的切平面的一侧.

证明 对于任一点 $x_0 \in M$,考虑函数 $f: M \to \mathbf{R}$ 如下:

$$f(x) = n(x_0) \cdot (x - x_0), \quad x \in M,$$

其中 $n(x_0)$ 是 M 在 x_0 点的单位法向量. 于是,M 位于 x_0 点的切平面的一侧等价于函数 $f(x)$ 不变号.

因为 M 是紧致的,故 $f(x)$ 必达到极大值和极小值. 设 $x_1, x_2 \in M$ 分别使 $f(x_1) = \max\limits_M f, f(x_2) = \min\limits_M f$. 于是

$$\mathrm{d}f(x_1) = 0, \quad \mathrm{d}f(x_2) = 0.$$

因为 $\mathrm{d}f(x) = n(x_0) \cdot \mathrm{d}x$,故上述条件化为

$$n(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)_{x_1} = 0, \quad n(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)_{x_2} = 0.$$

这表明

$$n(x_0) = \pm\, n(x_1), \quad n(x_0) = \pm\, n(x_2).$$

显然 $x_1 \neq x_2$,否则 $f = \text{const.}$,从而 M 为平面. 根据 Hadamard 定理,由于 M 的 Gauss 映射是一一的,故 $n(x_1) = -\,n(x_2)$. 这样,或者 $n(x_0) = n(x_1)$,或者 $n(x_0) = n(x_2)$. 再由 Hadamard 定理,可见或者 $x_0 = x_1$,或者 $x_0 = x_2$. 因为 $f(x_0) = 0$,故若 $x_0 = x_1$,则对于任何 $x \in M$ 有 $f(x) \leqslant 0$;若 $x_0 = x_2$,则有 $f(x) \geqslant 0$. 所以不论哪种情况,函数 $f(x)$ 不变号. 证毕.

3.2 Cohn-Vossen 定理

对于 $\mathbf{E}^3$ 中的卵形面，也有类似于球面的下述刚性定理.

定理 3.3(S. Cohn-Vossen，1927) $\mathbf{E}^3$ 中两个等距对应的卵形面是合同的，即它们只差 $\mathbf{E}^3$ 中的一个运动或一个运动和一个反射的乘积.

为了证明这个定理，我们先建立两个引理.

引理 3.4 设

$$\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 \text{ 和 } \bar{\lambda} x^2 + 2\bar{\mu} xy + \bar{\nu} y^2 \tag{3.1}$$

是两个正定的二次型，若

$$\lambda\nu - \mu^2 = \bar{\lambda}\bar{\nu} - \bar{\mu}^2, \tag{3.2}$$

则

$$\det\begin{pmatrix} \bar{\lambda} - \lambda & \bar{\mu} - \mu \\ \bar{\mu} - \mu & \bar{\nu} - \nu \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{3.3}$$

其中等号成立当且仅当这两个二次型恒同.

证明 首先，一个二次型为正定当且仅当 $\lambda > 0, \lambda\nu - \mu^2 > 0$，从而 $\nu > 0$.

其次，引理内容在变量 x, y 的非奇异线性变换下仍然保持着. 实际上，考虑线性变换

$$x = a_{11}x^* + a_{12}y^*, \quad y = a_{21}x^* + a_{22}y^*,$$

其中

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

那么，(3.1) 的两个二次型可化为

$$\lambda^* x^{*2} + 2\mu^* x^* y^* + \nu^* y^{*2} \text{ 和 } \bar{\lambda}^* x^{*2} + 2\bar{\mu}^* x^* y^* + \bar{\nu}^* x^{*2}, \tag{3.4}$$

其中系数满足

$$\det\begin{pmatrix}\lambda^* & \mu^* \\ \mu^* & \nu^*\end{pmatrix} = \left[\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right]^2 \det\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ \mu & \nu\end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix}\bar{\lambda}^* & \bar{\mu}^* \\ \bar{\mu}^* & \bar{\nu}^*\end{pmatrix} = \left[\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right]^2 \det\begin{pmatrix}\bar{\lambda} & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & \bar{\nu}\end{pmatrix}.$$

这样，两个新的二次型(3.4) 对于适当的 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 也都是正定的. 由此得知引理的内容仍不改变.

据此，必要时可通过一线性变换，使得 $\bar{\mu}^* = \mu^*$. 不失一般性，我们可以一开始假定 $\bar{\mu} = \mu$，于是，由(3.2) 得

$$\bar{\nu} = \frac{\lambda\nu}{\bar{\lambda}}.$$

(3.3) 的左边就化为

$$(\bar{\lambda} - \lambda)(\bar{\nu} - \nu) = (\bar{\lambda} - \lambda)\left(\frac{\lambda\nu}{\bar{\lambda}} - \nu\right)$$

$$= -\frac{\nu}{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda} - \lambda)^2 \leqslant 0,$$

而且当且仅当 $\bar{\lambda} = \lambda, \bar{\nu} = \nu$ 时，才有 $(\bar{\lambda} - \lambda)(\bar{\nu} - \nu) = 0$. 这就证明了引理 3.4.

引理 3.5(Herglotz 积分公式) 设 $M, \overline{M}$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中闭曲面，它们的平均曲率为 $H, \overline{H}$，若存在等距对应 $f: M \to \overline{M}$，则成立下面的积分公式

$$\iint_M \overline{H}(f(x))\mathrm{d}A - \iint_M H(x)\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\iint_M p\det(\overline{B} - B)\mathrm{d}A, \tag{3.5}$$

其中 $p = x \cdot n$ 称为 M 的支持函数；n 是 M 的单位法向量场；x 是 M 的位置向量，$\mathrm{d}A$ 是 M 的面积元；$\overline{B}$ 和 B 分别是 $\overline{M}$ 和 M 的第二基本形式的系数矩阵.

证明 设 $f: M \to \overline{M}$ 是等距对应，在 M 和 $\overline{M}$ 上选取局部参数网 (u^1, u^2)，使得在 f 下相互对应的点具有相同参数. 关于 M 和 $\overline{M}$ 的活动幺正标架分别记为 $\{x; e_1(u^\alpha), e_2(u^\alpha), e_3(u^\alpha)\}$ 和 $\{\bar{x};$

$\bar{e}_1(u^\alpha), \bar{e}_2(u^\alpha), \bar{e}_3(u^\alpha)\}$，$\alpha = 1,2$. 在 f 下 $\overline{M}$ 的结构方程和对应量分别用带一横"—"记号表示之. 不失一般性，可以假定第一章中类似的关系式(3.33) 在 f 下的对应点成立，从而第一章中类似的(3.34) 也成立.

利用幺正标架的运动方程和结构方程，注意到 $\overline{K} = K$，不难算得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(e_3, x, \bar{\omega}_1^3 e_1 + \bar{\omega}_2^3 e^2) \\
=& (\mathrm{d}e_3, x, \bar{\omega}_1^3 e_1 + \bar{\omega}_2^3 e^2) + (e_3, \mathrm{d}x, \bar{\omega}_1^3 e_1 + \bar{\omega}_2^3 e^2) \\
&+ (e_3, x, \mathrm{d}(\bar{\omega}_1^3 e_1 + \bar{\omega}_2^3 e^2)) \\
=& \omega^1 \wedge \bar{\omega}_2^3 - \omega^2 \wedge \bar{\omega}_1^3 + (e_3 \cdot x)(\omega_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3 - \omega_2^3 \wedge \bar{\omega}_1^3) \\
=& 2\overline{H}\omega^1 \wedge \omega^2 + pJ\omega^1 \wedge \omega^2,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中

$$p = e_3 \cdot x = n \cdot x, \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
J &= b_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{11}b_{22} - 2b_{12}\bar{b}_{12} \\
&= -\det(\overline{B} - B) + K + \overline{K} \\
&= 2K - \det(\overline{B} - B),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

注意，在(3.6) 的计算过程中，一方面应用函数行列式的微分法则；另一方面，当作为"系数"的外微分形式相乘时要取外积"∧"，因而先后顺序不能交换.

在 M 上积分(3.6)，利用 Stokes 定理，得

$$2\iint_M \overline{H}(f(x))\mathrm{d}A + \iint_M pJ\mathrm{d}A = 0, \tag{3.10}$$

其中 $\mathrm{d}A = \omega^1 \wedge \omega^2$ 是 M 的面积元.

特别，当 M 和 $\overline{M}$ 恒同时，$J = 2K$，$\overline{H} = H$，从而(3.10) 成为

$$\iint_M H\mathrm{d}A + \iint_M pK\mathrm{d}A = 0. \tag{3.11}$$

从(3.10)减去(3.11)的两倍，利用(3.8)和(3.9)，便得(3.5).证毕.

定理 3.3 的证明　设卵形面 $M,\overline{M}$ 之间存在等距对应 $f: M \to \overline{M}$，根据第一章 §3 中的定理 3.5，我们只须证明 M 和 $\overline{M}$ 的第二基本形式 II 和 $\overline{\mathrm{II}}$ 在对应 f 下相等.

沿用上述引理 3.5 的记号.我们在 M 的内部取一点作为 $\mathbf{E}^3$ 的原点.设取 e_3 的正向指向 M 的外侧，则根据命题 3.2，便有

$$p = e_3 \cdot x = n \cdot x > 0.$$

由于 $K > 0, \overline{K} > 0$，故(3.9)中的两个矩阵都是正定的.应用引理 3.4，便有

$$\det(\overline{B} - B) \leqslant 0.$$

这样，在引理 3.5 的(3.5)的右边，被积函数是非正的，由此可见

$$\iint_M H \mathrm{d}A \geqslant \iint_M \overline{H} \mathrm{d}A.$$

但是 M 和 $\overline{M}$ 的地位是对称的，故也必有

$$\iint_M \overline{H} \mathrm{d}A \geqslant \iint_M H \mathrm{d}A$$

因此

$$\iint_M H \mathrm{d}A = \iint_M \overline{H} \mathrm{d}A.$$

从而(3.5)右边的行列式 $\det(\overline{B} - B) = 0$，根据引理 3.4，必有

$$\overline{b}_{11} = b_{11}, \quad \overline{b}_{12} = b_{12}, \quad \overline{b}_{22} = b_{22},$$

即 M 和 $\overline{M}$ 的第二基本形式在 f 下恒同.定理证毕.

3.3 Minkowski 积分公式

公式(3.11)是 Minkowski 对卵形面证明的，然而容易看到，这对于任何紧致曲面也是成立的.不仅如此，我们还可把 Minkowski 关于卵形面的另一积分公式加以推广.

定理 3.6(Minkowski 积分公式) 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的紧致曲面，它的 Gauss 曲率和平均曲率为 K 和 H，则成立下列公式

$$\iint_M H\mathrm{d}A + \iint_M pK\mathrm{d}A = 0, \tag{3.12}$$

$$\iint_M pH\mathrm{d}A + A(M) = 0, \tag{3.13}$$

其中 $p = n \cdot x$ 是 M 的支持函数；$A(M)$ 是 M 的面积.

证明 (3.12) 就是(3.11)，而后者是从(3.6) 推导出来的. 为此，我们只要把(3.6) 改写成

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, e_3, \mathrm{d}e_3) &= \mathrm{d}(x, e_3, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) \\ &= 2H\omega^1 \wedge \omega^2 + 2pK\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

然后两边在 M 上积分，即可得(3.12).

为了证明(3.13)，考虑下面的外微分

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(e_3, x, \mathrm{d}x) &= (\mathrm{d}e_3, x, \mathrm{d}x) + (e_3, \mathrm{d}x, \mathrm{d}x) \\ &= p(\omega_3^2 \wedge \omega^1 - \omega_3^1 \wedge \omega^2) + 2\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= 2pH\omega^1 \wedge \omega^2 + 2\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

在 M 上积分(3.15)，应用 Stokes 定理，便得(3.13). 证毕.

作为 Minkowski 积分公式的应用，我们可得球面的一些特征. 为此，先引入下列概念.

定义 若 $\mathbf{E}^3$ 中一张紧致连通曲面具有下述性质：存在 $\mathbf{E}^3$ 中一点，它始终位于曲面的所有切平面的同一侧，则该曲面称为**星形的**(star-shaped).

显然，卵形面是星形的，因为它内部的每一点都有这个性质.

定理 3.7 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中具有常数平均曲率的星形曲面，则 M 必是一个球面. 特别地，常平均曲率的卵形面必是球面.

证明 因为 $H = \text{const.}$，从(3.12) 和(3.13) 易得

$$\iint_M (H^2 - K)p\mathrm{d}A = 0. \tag{3.16}$$

因为 M 是星形的，故存在一点 $x_0 \in \mathbf{E}^3$，使它始终位于 M 的所有切平面的一侧. 取 x_0 作为 $\mathbf{E}^3$ 的原点，则我们可以适当选取 M 的法方向，使 $p = n \cdot x > 0$. 由于 $H^2 - K \geqslant 0$，故(3.16) 当且仅当 $H^2 - K = 0$ 时成立，这意味着 M 的各点都是脐点；又由于 M 是紧致连通的，故 M 必是一个球面. 证毕.

作为练习，读者可用积分公式证明 Liebmann 定理.

习　　题

1. 证明(3.6) 中的混合积 $(e_3, x, \mathrm{d}(\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2)) = 0$.
2. 证明(3.14) 式.
3. 证明(3.16) 式.
4. 试用 Minkowski 积分公式证明 Liebmann 定理.

§4　Minkowski 问题和 Christoffel 问题的唯一性

4.1　概述

在整体微分几何学中，卵形面在某些几何条件下的存在性和唯一性问题早就为人们所特别重视，最著名的三个经典问题如下：

(Ⅰ)Weyl 问题：已知定义在单位球面 S^2 上的一个具有正 Gauss 曲率的度量二次形式 $\mathrm{d}s^2$，在 $\mathbf{E}^3$ 中是否存在一张可微同胚于 S^2 的卵形面，使它的第一基本形式能用给定的 $\mathrm{d}s^2$ 表示？

(Ⅱ)Minkowski 问题：已知定义在具有单位内法向量 e_3 的单位球面 S^2 上的一个正的点函数 $K(e_3)$，在 $\mathbf{E}^3$ 中是否存在一张卵形面，使它在单位内法向量为 e_3 的点，其 Gauss 曲率为 $K(e_3)$？

(Ⅲ)Christorffel 问题：这个问题与(Ⅱ)类似，只是用主曲率

半径之和代替 Gauss 曲率.

这些问题的存在性都归结为一类非线性偏微分方程问题，讨论都比较复杂，这里仅考虑它们的唯一性问题. 因为 Weyl 问题的唯一性可以从 Cohn-Vossen 定理直接推出，故以下仅讨论 Minkowski 问题和 Christoffel 问题的唯一性.

4.2 基本公式

设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的一张曲面，若它的主曲率非零，则主曲率的倒数称为**主曲率半径**.

由第一章 §3 的讨论，可设

$$\begin{cases}\omega_1^3 = b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2, \\ \omega_2^3 = b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2,\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $b_{12} = b_{21}$，则平均曲率 H 与 Gauss 曲率 K 分别为

$$H = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}), \quad K = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

因为 M 的第二基本形式 $\mathrm{II} = b_{11}(\omega^1)^2 + 2b_{12}\omega^1\omega^2 + b_{22}(\omega^2)^2$ 非蜕化，即矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

满秩，故存在 B 的逆矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21}, \tag{4.2}$$

使得从(4.1)可解出

$$\omega^\alpha = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta}\omega_\beta^3 \quad (\alpha,\beta = 1,2). \tag{4.3}$$

于是

$$\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 = \det(\lambda_{\alpha\beta}) = \frac{1}{\det B} = \frac{1}{K}. \tag{4.4}$$

可以证明，矩阵(4.2)的迹 $\lambda_{11} + \lambda_{22}$ 就是主曲率半径之和，即

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

事实上，由(4.1)易算得

$$\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = K\omega^1 \wedge \omega^2 = K\mathrm{d}A, \tag{4.5}$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega^2 - \omega_2^3 \wedge \omega^1 = (b_{11} + b_{22})\omega^1 \wedge \omega^2 = 2H\mathrm{d}A. \tag{4.6}$$

由(4.3)，(4.5)和(4.6)，可得

$$\begin{aligned} 2H\mathrm{d}A &= \omega_1^3 \wedge (\sum_\beta \lambda_{2\beta}\omega_\beta^3) - \omega_2^3 \wedge (\sum_\beta \lambda_{1\beta}\omega_\beta^3) \\ &= (\lambda_{11} + \lambda_{22})\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ &= (\lambda_{11} + \lambda_{22})K\mathrm{d}A. \end{aligned} \tag{4.7}$$

因为矩阵 B 满秩，即 $K \neq 0$，因此由上式便得

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} = \frac{2H}{K}.$$

而

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{2H}{K},$$

于是

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{4.8}$$

4.3 Minkowski 问题的唯一性

定理 4.1(Minkowski 问题的唯一性) 设 M 和 $\overline{M}$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中两张卵形面，$f: M \to \overline{M}$ 是微分同胚，使得在 M 和 $\overline{M}$ 的对应点有相同的单位内法向量和相等的 Gauss 曲率，则 f 是一个平移.

证明 由于 M 和 $\overline{M}$ 在微分同胚 f 下的对应点处有相同的单位法向量，故可取局部幺正标架场 $\{x;e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\{\bar{x};\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$，使 $\bar{e}_3 = e_3$. 不失一般性，还可进一步假定对应点处

$$\bar{e}_\alpha = e_\alpha \quad (\alpha,\beta = 1,2).$$

于是

$$\mathrm{d}\bar{x} = \bar{\omega}^{\alpha} e_{\alpha}, \quad \mathrm{d}\bar{e}_3 = \omega_3^{\alpha} e_{\alpha}.$$

因 $\bar{e}_3 = e_3$,故从上面的第二式可见

$$\bar{\omega}_3^{\alpha} = \omega_3^{\alpha}, \quad 即 \quad \bar{\omega}_{\alpha}^3 = \omega_{\alpha}^3. \tag{4.9}$$

类似于(4.3),有

$$\bar{\omega}^{\alpha} = \sum_{\beta} \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \omega_{\beta}^3. \tag{4.10}$$

由于 Σ 和 $\bar{\Sigma}$ 在对应点有相等的 Gauss 曲率,即 $K = \bar{K}$,故从(4.4)可见

$$\bar{\lambda}_{11}\bar{\lambda}_{22} - \bar{\lambda}_{12}^2 = \frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{K} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2. \tag{4.11}$$

由(4.9)、(4.5)、(4.3) 及(4.10)、(4.11),不难算得

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}^1 \wedge \omega^2 - \bar{\omega}^2 \wedge \omega^1 &= \left(\sum_{\alpha} \bar{\lambda}_{1\alpha} \omega_{\alpha}^3\right) \wedge \left(\sum_{\beta} \lambda_{2\beta} \omega_{\beta}^3\right) \\
&\quad - \left(\sum_{\alpha} \bar{\lambda}_{2\alpha} \omega_{\alpha}^3\right) \wedge \left(\sum_{\beta} \lambda_{1\beta} \omega_{\beta}^3\right) \\
&= (\bar{\lambda}_{11}\lambda_{22} - 2\bar{\lambda}_{12}\lambda_{12} + \lambda_{11}\bar{\lambda}_{22}) K \mathrm{d}A \\
&= \left(- \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12} - \lambda_{12} \\ \bar{\lambda}_{21} - \lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22} - \lambda_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_{11} & \bar{\lambda}_{12} \\ \bar{\lambda}_{12} & \bar{\lambda}_{22} \end{vmatrix} \right) K \mathrm{d}A \\
&= - \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12} - \lambda_{12} \\ \bar{\lambda}_{21} - \lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22} - \lambda_{22} \end{vmatrix} K \mathrm{d}A + 2\mathrm{d}A.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

从运动方程及 $\bar{e}_{\alpha} = e_{\alpha}$,容易算得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\bar{x}, x, \mathrm{d}x) &= (\mathrm{d}\bar{x}, x, \mathrm{d}x) + (\bar{x}, \mathrm{d}x, \mathrm{d}x) \\
&= \bar{\omega}^1 \wedge \omega^2 (e_1, x, e_2) + \bar{\omega}^2 \wedge \omega^1 (e_2, x, e_1) \\
&\quad + \omega^1 \wedge \omega^2 (\bar{x}, e_1, e_2) + \omega^2 \wedge \omega^1 (\bar{x}, e_2, e_1) \\
&= - p(\bar{\omega}^1 \wedge \omega^2 - \bar{\omega}^2 \wedge \omega^1) + 2\bar{p}\mathrm{d}A,
\end{aligned}$$

其中 $\quad p = x \cdot e_3, \quad \bar{p} = \bar{x} \cdot \bar{e}_3.$

将(4.12)代入上式,得

$$\mathrm{d}(\bar{x},x,\mathrm{d}x)=\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12}\\ \bar{\lambda}_{21}-\lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}pK\mathrm{d}A-2p\mathrm{d}A+2\bar{p}\mathrm{d}A. \tag{4.13}$$

利用(4.9)和(4.5),可见

$$\bar{K}\mathrm{d}\bar{A}=K\mathrm{d}A.$$

因为$\bar{K}=K$,故$\mathrm{d}\bar{A}=\mathrm{d}A$.若交换两曲面$M$和$\overline{M}$的地位,则(4.13)变为

$$\mathrm{d}(x,\bar{x},\mathrm{d}\bar{x})=\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12}\\ \bar{\lambda}_{21}-\lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}\bar{p}K\mathrm{d}A-2\bar{p}\mathrm{d}A+2p\mathrm{d}A. \tag{4.14}$$

将(4.13)和(4.14)相加,得

$$\mathrm{d}(\bar{x},x,\mathrm{d}x)+\mathrm{d}(x,\bar{x},\mathrm{d}\bar{x})=\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12}\\ \bar{\lambda}_{21}-\lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}(p+\bar{p})\mathrm{d}A. \tag{4.15}$$

对(4.15)两边积分,应用 Stokes 定理,得

$$\iint_M\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12}\\ \bar{\lambda}_{21}-\lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}(p+\bar{p})\mathrm{d}A=0. \tag{4.16}$$

如果必要,可将两曲面M和$\overline{M}$中的一个沿着连结任意两对应点的直线平行移动,使得M和$\overline{M}$的两凸包的交D非空.于是,可在D中选取一点作为$\mathbf{E}^3$的原点,从而使$p>0$,$\bar{p}>0$.利用§3的引理3.4,可知(4.16)的被积函数是非正的.所以(4.16)意味着

$$\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12}\\ \bar{\lambda}_{21}-\lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}=0,$$

$$\lambda_{12}=\lambda_{21},\quad \bar{\lambda}_{12}=\bar{\lambda}_{21}.$$

再根据同一引理,上式表明

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta=1,2).$$

因此，由(4.9)、(4.3)及(4.10)得

$$\bar{\omega}^\alpha = \omega^\alpha.$$

从而在 $f: M \to \overline{M}$ 下，有

$$\mathrm{d}\bar{x} = \mathrm{d}x,$$

即

$$\bar{x} = x + C \quad (C \text{ 为常向量}).$$

因此，f 是一个平移. 定理证毕.

注 定理 4.1 的证明方法来源于陈省身(S. S. Chern, Amer. J. Math., 1957, 79: 949 ~ 950)，这里采用的表达方式属于熊全治(C. C. Hsiung, Illionois J. Math., 1958, 2: 71 ~ 75). 上述定理还可写成更一般的形式如下.

推论 4.2 设 M 和 $\overline{M}$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中分别具有边界 C 和 $\overline{C}$ 的定向紧致凸曲面，$f: M \to \overline{M}$ 是微分同胚，使得在对应点有相同的单位内法向量和相等的 Gauss 曲率. 若 f 在 C 上的限制是 C 到 $\overline{C}$ 上的平移，则 f 对于整个 M 和 $\overline{M}$ 是一个平移.

4.4 Christoffel 问题的唯一性

定理 4.3 设 M 和 $\overline{M}$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中两张卵形面，$f: M \to \overline{M}$ 是微分同胚，使得 M 和 $\overline{M}$ 在对应点有相同的单位内法向量及相等的主曲率半径之和，则 f 是一个平移.

证明 采用与证明定理 4.1 一样的局部幺正标架场，并沿用那里的记号，注意到 $\overline{K}\mathrm{d}\overline{A} = K\mathrm{d}A$ 且 $1/K = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2$，$1/\overline{K} = \bar{\lambda}_{11}\bar{\lambda}_{22} - \bar{\lambda}_{12}^2$ 以及(4.6)，容易算得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\bar{x}, e_3, \mathrm{d}x) &= (\mathrm{d}\bar{x}, e_3, \mathrm{d}x) + (\bar{x}, \mathrm{d}e_3, \mathrm{d}x) \\
&= -(\bar{\omega}^1 \wedge \omega^2 - \bar{\omega}^2 \wedge \omega^1) - \bar{p}(\omega_1^3 \wedge \omega^2 - \omega_2^3 \wedge \omega^1) \\
&= -(\bar{\lambda}_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\bar{\lambda}_{12} + \lambda_{11}\bar{\lambda}_{12})K\mathrm{d}A - 2\bar{p}H\mathrm{d}A \\
&= \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12} - \lambda_{12} \\ \bar{\lambda}_{21} - \lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22} - \lambda_{22} \end{vmatrix} K\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

$$
-\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{vmatrix} K\mathrm{d}A-\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}\end{vmatrix}\overline{K}\mathrm{d}\overline{A}
$$

$$
-\bar p(\lambda_{11}+\lambda_{22})K\mathrm{d}A. \tag{4.17}
$$

由定理条件及(4.8)可知 $\bar\lambda_{11}+\bar\lambda_{22}=\lambda_{11}+\lambda_{22}$，并注意到(4.9)，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\bar x,e_3,\mathrm{d}\bar x) &= (\mathrm{d}\bar x,e_3,\mathrm{d}\bar x)+(\bar x,\mathrm{d}e_3,\mathrm{d}\bar x)\\
&=-2\mathrm{d}\overline{A}-2\bar p\overline{H}\mathrm{d}\overline{A}\\
&=-2\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}\end{vmatrix}\overline{K}\mathrm{d}\overline{A}-\bar p(\bar\lambda_{11}+\bar\lambda_{22})\overline{K}\mathrm{d}\overline{A}\\
&=-2\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A-\bar p(\lambda_{11}+\lambda_{22})K\mathrm{d}A.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

将(4.17)和(4.18)相减，得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\bar x,e_3,\mathrm{d}x-\mathrm{d}\bar x) &= \begin{vmatrix}\bar\lambda_{11}-\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}-\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21}-\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A\\
&\quad-\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A+\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A.
\end{aligned}
$$

由于 M 和 $\overline{M}$ 的地位是对称的，交换 M 和 $\overline{M}$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(x,e_3,\mathrm{d}\bar x-\mathrm{d}x) &= \begin{vmatrix}\bar\lambda_{11}-\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}-\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21}-\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A\\
&\quad-\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A+\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A.
\end{aligned}
$$

将上两式相加，得

$$
\mathrm{d}(\bar x-x,e_3,\mathrm{d}x-\mathrm{d}\bar x)=2\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11}-\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}-\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21}-\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A. \tag{4.19}
$$

上式两边积分，应用 Stokes 公式，便得

$$
\iint_M\begin{vmatrix}\bar\lambda_{11}-\lambda_{11} & \bar\lambda_{12}-\lambda_{12}\\ \bar\lambda_{21}-\lambda_{21} & \bar\lambda_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}K\mathrm{d}A=0. \tag{4.20}
$$

但由条件 $\bar{\lambda}_{11}+\bar{\lambda}_{22}=\lambda_{11}+\lambda_{22}$，易见

$$\begin{vmatrix}\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11} & \bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12}\\ \bar{\lambda}_{21}-\lambda_{21} & \bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{11}-\lambda_{11})^2-\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{22}-\lambda_{22})^2-(\bar{\lambda}_{12}-\lambda_{12})^2\leqslant 0, \tag{4.21}$$

上式等号成立当且仅当 $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}$.

由于卵形面 $K>0$，这样(4.20)意味着(4.21)的等号成立，因此 $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}$，从而 $\bar{\omega}^{\alpha}=\omega^{\alpha}$，$\mathrm{d}\bar{x}=\mathrm{d}x$. 所以 f 是一个平移. 证毕.

推论 4.4 设 M 和 $\overline{M}$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中分别具有边界 C 和 $\bar{C}$ 的定向紧致凸曲面，$f: M\to\overline{M}$ 是可微同胚，使得 M 和 $\overline{M}$ 的每对对应点有相同的单位内法向量和相等的主曲率半径之和，并且使两边界 C 和 $\bar{C}$ 在对应点有相同的切向量及相等的弧长元素，那么 f 是一个平移.

习　　题

1. 不用逆矩阵(4.2)，直接证明(4.8).
2. 详细验证(4.12).
3. 验证(4.17)和(4.18).

§5　全平均曲率与 Willmore 猜想

5.1　全平均曲率

定义 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的紧致连通闭曲面，它的平均曲率为 H，积分

$$W=\iint_M H^2\mathrm{d}A$$

称为 M 的全平均曲率.

这是 T. J. Willmore 在 1965 年首先引入的.

定理 5.1 全平均曲率 W 是 $\mathbf{E}^3$ 的共形不变量，即 W 在 $\mathbf{E}^3$ 的共形变换下不变.

证明 设 $\mathbf{E}^3$ 的原欧氏度量为

$$\mathrm{d}s^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2.$$

考虑共形变换后的新度量(见第二章，2.3，(2.11))

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \rho^2 \mathrm{d}s^2,$$

其中 ρ 是空间的正函数. 设 $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ 是度量 $\mathrm{d}s^2$ 下的幺正标架，则在新度量 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 下的幺正标架是 $\{\bar{e}_i = \frac{1}{\rho}e_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$. 于是

$$\bar{\omega}^i = \rho\omega^i \quad (i = 1,2,3). \tag{5.1}$$

设新度量 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 下的结构方程为

$$\mathrm{d}\bar{\omega}^i = \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}_j^i \quad (1 \leqslant i,j,\cdots \leqslant 3).$$

把(5.1)代入上式得

$$\mathrm{d}(\log\rho) \wedge \omega^i = \sum_j \omega^j \wedge (\bar{\omega}_j^i - \omega_j^i). \tag{5.2}$$

令

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\log\rho) = \rho_j\omega^j, \\ &\theta_j^i = \bar{\omega}_j^i - \omega_j^i - \rho_j\omega^i + \rho_i\omega^j, \end{aligned} \tag{5.3}$$

则(5.2)可改写为

$$\omega^j \wedge \theta_j^i = 0.$$

这里我们已采用 Einstein 求和约定(见第一章，§1). 根据 Cartan 引理(见第一章，引理 2.3)，上式表明

$$\theta_j^i = c_{jk}^i\omega^k \quad (i,j,k = 1,2,3),$$

其中 $c_{jk}^i = c_{kj}^i$. 由于 $\theta_j^i + \theta_i^j = 0$，故 $c_{jk}^i = -c_{ik}^j$. 这样，

$$c_{jk}^i = c_{kj}^i = -c_{ij}^k = -c_{ji}^k = c_{ki}^j = c_{ik}^j = -c_{jk}^i.$$

所以 $c_{jk}^i = 0$，从而 $\theta_j^i = 0$. 代回(5.3)的第二式，得

$$\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i + \rho_j\omega^i - \rho_i\omega^j. \tag{5.4}$$

现取 e_3 为曲面 M 的单位法向量，从而限制在 M 上有 $\omega^3 = 0$.

在共形变换下，M 的单位法向量是 $\bar{e}_3 = \frac{1}{\rho}e_3$，因而限制在 M 上有 $\bar{\omega}^3 = 0$. 利用(5.1)和(5.4)，易见在 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 下 M 的第二基本形式为

$$\bar{\mathrm{II}} = \bar{\omega}_1^3\bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3\bar{\omega}^2 = \rho(\omega_1^3\omega^1 + \omega_2^3\omega^2) - \rho\rho_3[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2],$$

即

$$\rho\frac{\bar{\mathrm{II}}}{\bar{\mathrm{I}}} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} - \rho_3, \tag{5.5}$$

其中

$$\bar{\mathrm{I}} = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2, \quad \mathrm{I} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

分别是 M 关于 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 和 $\mathrm{d}s^2$ 诱导的第一基本形式. 根据法曲率的定义(见第一章，3.3，公式(3.29))，设 k_1, k_2 是 M 关于 $\mathrm{d}s^2$ 的主曲率，$\bar{k}_1$，$\bar{k}_2$ 是 M 关于 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 的主曲率，从(5.5)便得

$$\rho\bar{k}_1 = k_1 - \rho_3, \quad \rho\bar{k}_2 = k_2 - \rho_3. \tag{5.6}$$

用 H, K 和 $\bar{H}, \bar{K}$ 分别表示 M 关于 $\mathrm{d}s^2$ 和 $\mathrm{d}\bar{s}^2$ 的平均曲率和 Gauss 曲率，从(5.6)便有

$$\begin{aligned} \rho^2\bar{K} &= K - \rho_3(k_1 + k_2) + (\rho_3)^2, \\ \rho^2\bar{H}^2 &= H^2 - \rho_3(k_1 + k_2) + (\rho_3)^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

因此，注意到 $\mathrm{d}\bar{A} = \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2 = \rho^2\omega^1 \wedge \omega^2 = \rho^2\mathrm{d}A$，从(5.7)得

$$(\bar{H}^2 - \bar{K})\mathrm{d}\bar{A} = (H^2 - K)\mathrm{d}A. \tag{5.8}$$

由 Gauss-Bonnet 公式有

$$\iint_M \bar{K}\mathrm{d}\bar{A} = 2\pi\chi(M) = \iint_M K\mathrm{d}A.$$

这样，对(5.8)两边积分，即得

$$\bar{W} = \iint_M \bar{H}^2\mathrm{d}\bar{A} = \iint_M H^2\mathrm{d}A = W.$$

因此全平均曲率在 $\mathbf{E}^3$ 的共形变换下不变. 定理证毕.

5.2 球面的一个特征

利用全平均曲率可得标准球面 $S^2 \subset \mathbf{E}^3$ 的一个特征.

定理 5.2 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通的闭曲面,则

$$W = \iint_M H^2 \mathrm{d}A \geqslant 4\pi, \tag{5.9}$$

式中等号当且仅当 M 为标准球面时成立.

为了证明上述定理,我们先证明下面的引理.

引理 5.3 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面,K 为 M 的 Gauss 曲率,则

$$\iint_{M^+} K \mathrm{d}A \geqslant 4\pi, \tag{5.10}$$

其中 M^+ 表示 M 上使 $K > 0$ 的区域.

证明 首先,由于 M 是紧致的,由本章 §2 的引理 2.2,M^+ 非空.

其次,设 $\mathscr{T}: M \to S^2 \subset \mathbf{E}^3$ 是 M 的 Guass 映射. 如所知,在映射 $\mathscr{T}$ 下,面积元 $\mathrm{d}\widetilde{A} = K\mathrm{d}A$(见本章 3.1). 因此,$\mathscr{T}(M^+)$ 的面积是

$$\iint_{\mathscr{T}(M^+)} \mathrm{d}\widetilde{A} = \iint_{M^+} K \mathrm{d}A.$$

用 M^0 表示 M 上使 $K = 0$ 的点集. 我们可以证明 $\mathscr{T}: M^+ \cup M^0 \to S^2$ 是满映射.

事实上,设 $n_0 \in S^2$ 为任一固定点,它的位置向量也用 n_0 表示. 考虑函数 $f: M \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = n_0 \cdot x,$$

其中 $x \in M$ 是 M 上点的位置向量. 因为 M 是紧致的,所以对于 M 上的可微函数 $f(x)$,必存在点 $x_0 \in M$,使 f 在 x_0 达到极大值,从而

$$\mathrm{d}f(x_0) = 0, \quad \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x_0) \leqslant 0.$$

因为 n_0 不动,故

$$\mathrm{d}f = n_0 \cdot \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = n_0 \cdot \mathrm{d}(\mathrm{d}x).$$

这样，

$$n_0 \cdot \mathrm{d}x(x_0) = 0, \quad n_0 \cdot \mathrm{d}(\mathrm{d}x)(x_0) \leqslant 0. \tag{5.11}$$

(5.11) 的第一式表明 n_0 是曲面 M 在 x_0 点的单位法向量，第二式表明 M 在 x_0 点的第二基本形式是半正定的，即 $K(x_0) \geqslant 0$，$x_0 \in M^+ \cup M^0$. 这就证明了 $\mathscr{T} : M^+ \cup M^0 \to S^2$ 是满映射.

现在只要注意到 $\mathscr{T}(M^0)$ 的面积为零，就有

$$\iint\limits_{M^+} K\mathrm{d}A = \iint\limits_{M^+ \cup M^0} k\mathrm{d}A = \iint\limits_{\mathscr{T}(M^+ \cup M^0)} \mathrm{d}\widetilde{A} \geqslant 4\pi.$$

定理 5.2 的证明　用 k_1 和 k_2 表示 M 的主曲率，显然

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geqslant 0,$$

式中等号当且仅当 $k_1 = k_2$ 时成立，即为脐点时成立.

根据引理 5.3，我们有

$$\iint\limits_{M} H^2\mathrm{d}A \geqslant \iint\limits_{M^+} H^2\mathrm{d}A \geqslant \iint\limits_{M^+} K\mathrm{d}A \geqslant 4\pi,$$

即 $W \geqslant 4\pi$. 当等号成立时，由

$$\iint\limits_{M} H^2\mathrm{d}A \geqslant \iint\limits_{M^+ \cup M^0} H^2\mathrm{d}A \geqslant \iint\limits_{M^+ \cup H^0} K\mathrm{d}A = \iint\limits_{M^+} K\mathrm{d}A,$$

可见 $M^+ \cup M^0$ 上每点都是脐点，从而 $M^0 = \varnothing$（因为 M^+ 非空）. 由连续性，得 M 上 $K < 0$ 的区域 $M^- = \varnothing$. 因此，$M = M^+$ 且全部是脐点. 由于 M 是紧致连通的，所以 M 是标准球面. 定理 5.2 证毕.

定义　对于 $\mathbf{E}^3$ 中紧致闭曲面 M，积分 $\iint\limits_{M} |K| \mathrm{d}A$ 称为**全绝对曲率**.

定理 5.4　设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面，则 M 的全绝对曲率不小于 $2\pi(4 - \chi(M))$，其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数.

证明　由 Gauss-Bonnet 公式

$$2\pi\chi(M) = \iint_M K\mathrm{d}A = \iint_{M^+} K\mathrm{d}A + \iint_{M^-} K\mathrm{d}A,$$

故

$$\iint_{M^-} K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(M) - \iint_{M^+} K\mathrm{d}A.$$

于是,应用(5.10)有

$$\iint_M |K|\mathrm{d}A = \iint_{M^+} K\mathrm{d}A - \iint_{M^-} K\mathrm{d}A = 2\iint_{M^+} K\mathrm{d}A - 2\pi\chi(M)$$
$$\geqslant 8\pi - 2\pi\chi(M). \tag{5.12}$$

这就是所要证明的不等式.证毕.

如所知,对于拓扑球面(同胚于S^2),它的Euler示性数为2.从定理5.4立即得

推论5.5 若$\mathbf{E}^3$中紧致闭曲面M的全绝对曲率等于4π,则M是拓扑球面.

证明 当$\iint_M |K|\mathrm{d}A = 4\pi$时,由定理5.4有

$$4\pi \geqslant 8\pi - 2\pi\chi(M),$$

因此得$\chi(M) = 2$.证毕.

注 全绝对曲率也是一个整体的内蕴几何量.全绝对曲率的概念还可以推广到高维子流形.有关这方面的详细内容可参考陈省身和R.K.Lashof的工作(Amer.J.Math.,1957,79:308～318;Mich. Math. J.,1958,5:5～12).

5.3 环面的全平均曲率

拓扑环面是指亏格为1的紧致连通闭曲面,其中最熟悉的是$\mathbf{E}^3$中的圆环面T^2:

$$T^2 = \{(a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u\},$$

其中a,b是常数,且$b < a$,$0 \leqslant u \leqslant 2\pi$,$0 \leqslant v \leqslant 2\pi$,由直接计算易

得它的第一和第二基本形式的系数为

$$E=b^2,\quad F=0,\quad G=(a+b\cos u)^2,$$
$$L=b,\quad M=0,\quad N=\cos u(a+b\cos u).$$

平均曲率为

$$H=\frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)}.$$

面积元为

$$\mathrm{d}A=b(a+b\cos u)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

因此,全平均曲率为

$$\begin{aligned}W&=\int_{T^2}H^2\mathrm{d}A=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a+2b\cos u)^2}{4b(a+b\cos u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{\pi}{2C}\int_0^{2\pi}\frac{(1+2C\cos u)^2}{1+C\cos u}\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi^2}{C\sqrt{1-C^2}},\end{aligned}\tag{5.13}$$

其中 $C=b/a(<1)$ 称为圆环面的**半径比**.

容易看到,当 $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,W 的值最小,等于 $2\pi^2$. 因此,对于 $\mathbf{E}^3$ 中的圆环面恒有 $W\geqslant 2\pi^2$,式中等号当且仅当半径比为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时成立.

上述情况可推广如下:设 Γ 是一条空间简单闭曲线,它的曲率 $k(s)\neq 0$,s 是 Γ 的弧长参数,$0\leqslant s\leqslant l$. 在 Γ 的每个法平面内,作一个半径为 C(适当小)的圆,它的中心位于 Γ 上,当圆心在 Γ 走动一周时,这个圆所生成的曲面 M^2 称为 Γ 的**管状曲面**.

定理 5.6 设 H 是空间简单闭曲线 Γ 的管状曲面 M^2 的平均曲率,则

$$\int_{M^2}H^2\mathrm{d}A\geqslant 2\pi^2,\tag{5.14}$$

式中等号成立当且仅当 Γ 为圆周,M^2 为圆环面且半径比为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

证明 用 N 和 B 表示 Γ 的主法向量和副法向量，$x(s)$ 表示 Γ 的位置向量，则管状曲面 M^2 的方程是

$$r(s,u) = x(s) + C(\cos v)N(s) + C(\sin v)B(s), \tag{5.15}$$
$$0 \leqslant s \leqslant l, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi.$$

直接计算曲面(5.15)的第一和第二基本量为

$$E = (1 - Ck\cos v)^2 + \tau^2 C^2, \quad F = C^2\tau, \quad G = C^2,$$
$$L = C\tau^2 - k(\cos v)(1 - Ck\cos v), \quad M = C\tau, \quad N = C,$$

其中 k,τ 分别表示曲线 Γ 的曲率和挠率，于是平均曲率为

$$H = (1 - 2Ck\cos v)/2C(1 - Ck\cos v).$$

因此

$$\int_{M^2} H^2 \mathrm{d}A = \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{(1 - 2Ck\cos v)^2}{4C(1 - Ck\cos v)} \mathrm{d}v\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\pi}{2C}\int_0^l \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1 - C^2k^2}}. \tag{5.16}$$

利用空间闭曲线的 Fenchel 定理，由(5.16)可得估计

$$\int_{M^2} H^2 \mathrm{d}A = \pi\int_0^l \frac{|k|\mathrm{d}s}{2|Ck|\sqrt{1 - C^2k^2}}$$
$$\geqslant \pi\int_0^l |k|\mathrm{d}s \geqslant 2\pi^2, \tag{5.17}$$

式中等号成立当且仅当 Γ 为平面凸曲线，且 $C^2k^2 = 1 - C^2k^2$. 于是 $k = \text{const.}$，Γ 为一圆周. 这样 M^2 是圆环面. 再由上面的例子，可见半径比应为 $1/\sqrt{2}$. 证毕.

注 定理 5.6 是由 T. J. Willmore(1971) 和 K. Shiohama & R. Takaji (1970) 分别独立得到的，根据这个定理，T. J. Willmore 提出下面的猜想.

猜想(T. J. Willmore) 对于 $\mathbf{E}^3$ 中任何环面 T^2，恒有

$$\int_{T^2} H^2 \mathrm{d}A \geqslant 2\pi^2. \tag{5.18}$$

这个猜想,至今仍未解决.

习　　题

1. 详细推导从(5.6)得(5.7).

2. 详细计算(5.13).

3. 设 M^2 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面,它的全绝对曲率满足 $\int_{M^2}|K|\mathrm{d}A \geqslant 2m\pi$. 试证:$\int_{M^2}H^2\mathrm{d}A \geqslant \pi(m+\chi(M^2))$,其中 $\chi(M^2)$ 是 M^2 的 Euler 示性数.

4. 设 zy 平面上给定一个椭圆:$y=r+a\cos u$, $z=b\sin u(r>a>b>0)$. 该椭圆绕 z 轴旋转一周得环面 T^2. 试计算 T^2 的全平均曲率,并估计它的下界.

5. 设 Γ 是空间打结的简单正则闭曲线,试证 Γ 的管状曲面的全平均曲率不小于 $4\pi^2$.

§6　常负曲率曲面和 Bäcklund 变换

与凸曲面相反的曲面是 Guass 曲率处处为负的曲面,其中最简单也是最重要的一类便是 Guass 曲率处处等于负常数的曲面. 近年来,人们发现常负曲率曲面与一类偏微分方程的求解有密切关系,本节介绍这方面的有关问题.

6.1　常负曲率曲面和 SG 方程

设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的常负曲率曲面. 不失一般性,可假定 M 的 Guass 曲率 $K=-1$. 在 M 上取曲率线作为坐标曲线(u^1,u^2),由于主方向互相垂直,因此可取主方向作为曲面标架方向. 对于这样的标架,有

$$e_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \Big/ \left| \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \right| \quad (\alpha = 1, 2).$$

因而

$$\omega^1 = p\mathrm{d}u^1, \quad \omega^2 = q\mathrm{d}u^2, \tag{6.1}$$

其中 $p = \left| \frac{\partial x}{\partial u^1} \right|, q = \left| \frac{\partial x}{\partial u^2} \right|$ 是定义在 M 上的可微函数.

设 k_α 是对应于 $e_\alpha (\alpha = 1, 2)$ 的主曲率，则 M 的第二基本形式可写为

$$\mathrm{II} = k_1(\omega^1)^2 + k_2(\omega^2)^2.$$

于是第一章的(3.23)式可写为

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= k_1\omega^1 = k_1 p\mathrm{d}u^1, \\ \omega_2^3 &= k_2\omega^2 = k_2 q\mathrm{d}u^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

而 ω_1^2 由下列结构方程

$$\mathrm{d}\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1, \quad \mathrm{d}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \tag{6.3}$$

所唯一确定. 设

$$\omega_1^2 = a_1 \mathrm{d}u^1 + a_2 \mathrm{d}u^2,$$

其中 a_1, a_2 是待定系数. 将上式和(6.1)代入(6.3)，得

$$a_1 = \frac{-p_2}{q}, \quad a_2 = \frac{q_1}{p}, \tag{6.4}$$

其中

$$p_2 = \frac{\partial p}{\partial u^2}, \quad q_1 = \frac{\partial q}{\partial u^1}.$$

因此

$$\omega_1^2 = -\frac{p_2}{q}\mathrm{d}u^1 + \frac{q_1}{p}\mathrm{d}u^2. \tag{6.5}$$

从 $K = k_1 \cdot k_2 = -1$，可假设

$$k_1 = \mathrm{ctg}\psi, \quad k_2 = -\mathrm{tg}\psi. \tag{6.6}$$

将(6.2)和(6.5)代入方程

$$\mathrm{d}\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3,$$

便得

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(k_1 p) = k_2 p_2,$$

即

$$(k_1 - k_2)p_2 + p\frac{\partial k_1}{\partial u^2} = 0. \tag{6.7}$$

但由(6.6)

$$k_1 - k_2 = \operatorname{ctg}\psi + \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\sin\psi\cos\psi}.$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(\log p) = -\frac{\dfrac{\partial k_1}{\partial u^2}}{k_1 - k_2} = \frac{\partial}{\partial u^2}(\log\sin\psi),$$

即

$$p = U(u^1)\sin\psi. \tag{6.8}$$

同理，有

$$q = V(u^2)\cos\psi. \tag{6.9}$$

从(6.8)和(6.9)，注意到(6.1)，若有必要可适当改变曲率线的参数 u^1 和 u^2，我们总可以假定

$$p = \sin\psi, \quad q = \cos\psi. \tag{6.10}$$

于是，曲面的微分形式可写为

$$\omega^1 = \sin\psi\, du^1, \quad \omega^2 = \cos\psi\, du^2, \tag{6.11}$$

$$\omega_1^3 = \cos\psi\, du^1, \quad \omega_2^3 = -\sin\psi\, du^2, \tag{6.12}$$

$$\omega_1^2 = \frac{\partial\psi}{\partial u^2}du^1 - \frac{\partial\psi}{\partial u^1}du^2. \tag{6.13}$$

这时，曲面的 Gauss 方程 $d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$ 就化为

$$\psi_{u^1u^1} - \psi_{u^2u^2} = -\sin\psi\cos\psi, \tag{6.14}$$

其中 $\psi_{u^\alpha u^\alpha} = \dfrac{\partial^2\psi}{(\partial u^\alpha)^2}(\alpha = 1,2)$. (6.14) 通常称为 *SG* 方程 (**Sine-Gordon 方程**).

从(6.6)和(6.11),易知曲面的第一、第二基本形式为

$$\mathrm{I} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = \sin^2\psi(\mathrm{d}u^1)^2 + \cos^2\psi(\mathrm{d}u^2)^2,$$

$$\mathrm{II} = k_1(\omega^1)^2 + k_2(\omega^2)^2 = (\sin\psi\cos\psi)[(\mathrm{d}u^1)^2 - (\mathrm{d}u^2)^2]. \tag{6.15}$$

由此可见,2ψ 是曲面上两渐近曲线之间所成的角.

以上叙述表明:若在 $\mathbf{E}^3$ 中给定一张 Gauss 曲率 $K = -1$ 的曲面,则就得到 SG 方程(6.14)的一个解;反之,若已知 SG 方程的一个解 ψ,把上面推导过程逆回去,就可得 $\omega^1,\omega^2,\omega_1^2,\omega_1^3,\omega_2^3$,它们适合结构方程,从而确定了 $\mathbf{E}^3$ 中的一张 $K = -1$ 的曲面.这样,$\mathbf{E}^3$ 中 $K = -1$ 的曲面与 SG 方程的解之间存在一一对应关系.

于是,从 SG 方程的一个已知解寻求其他解的问题归结为 $\mathbf{E}^3$ 中 $K = -1$ 的曲面之间的变换,这就是所谓 **Bäcklund 变换**.

6.2 伪球线汇和焦曲面

所谓线汇,就是双参数的直线族,一般可写为

$$\bar{x} = x(u^1,u^2) + sy(u^1,u^2), \quad |y| = 1, \tag{6.16}$$

其中 s 是每条直线上的参数.

这样,方程

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t), \quad \left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\right)^2 \neq 0 \tag{6.17}$$

确定了一张直纹面,这张直纹面是可展曲面的充要条件是

$$(y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = 0. \tag{6.18}$$

这是关于 $\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2$ 的二次方程.若方程(6.18)有两个不同的实解,则经过每条直线有两个可展曲面,因此,整个线汇有两族可展曲面.每族可展曲面的脊线构成一个曲面,称为线汇的焦曲面.

若线汇(6.16)的两张焦曲面存在,则记它们为 M,M^*,线汇(6.16)是 M,M^* 的公切线族.因此,从线汇出发,可以自然地导出焦曲面之间的变换 $\varphi: M \to M^*$,它使 M 上的点通过公切线映为

M^* 上的对应点.

对于一般的线汇,上述变换 φ 可能不很简单,但对于下面定义的伪球线汇,则构成 Bäcklund 变换的几何基础.

定义 设 M,M^* 是一个线汇的两张焦曲面,$\varphi: M \to M^*$ 是自然映射,它使 M 上的点 x 通过公切线变为 M^* 上的点 $x^* = \varphi(x)$. 如果

(Ⅰ) $|x - x^*| = r, \quad r = \text{const.}$;

(Ⅱ) 对应点 x 与 x^* 处 M 和 M^* 的单位法向量 e_3 与 e_3^* 交成定角 τ,即

$$e_3 \cdot e_3^* = \cos \tau, \quad \tau = \text{const.},$$

那么称这线汇为**伪球线汇**.

定理(Bäcklund,1880) 伪球线汇的两张焦曲面 M,M^* 具有相等的负常数 Gauss 曲率 $K = -\left(\dfrac{\sin \tau}{r}\right)^2$.

证明 在 M 上选取活动正交标架 e_1,e_2,e_3,使 e_1 为 M,M^* 经过 x 点的公切线向量,e^3 为 M 的单位法向量(见图 Ⅲ-7),于是,M^* 的方程及标架为

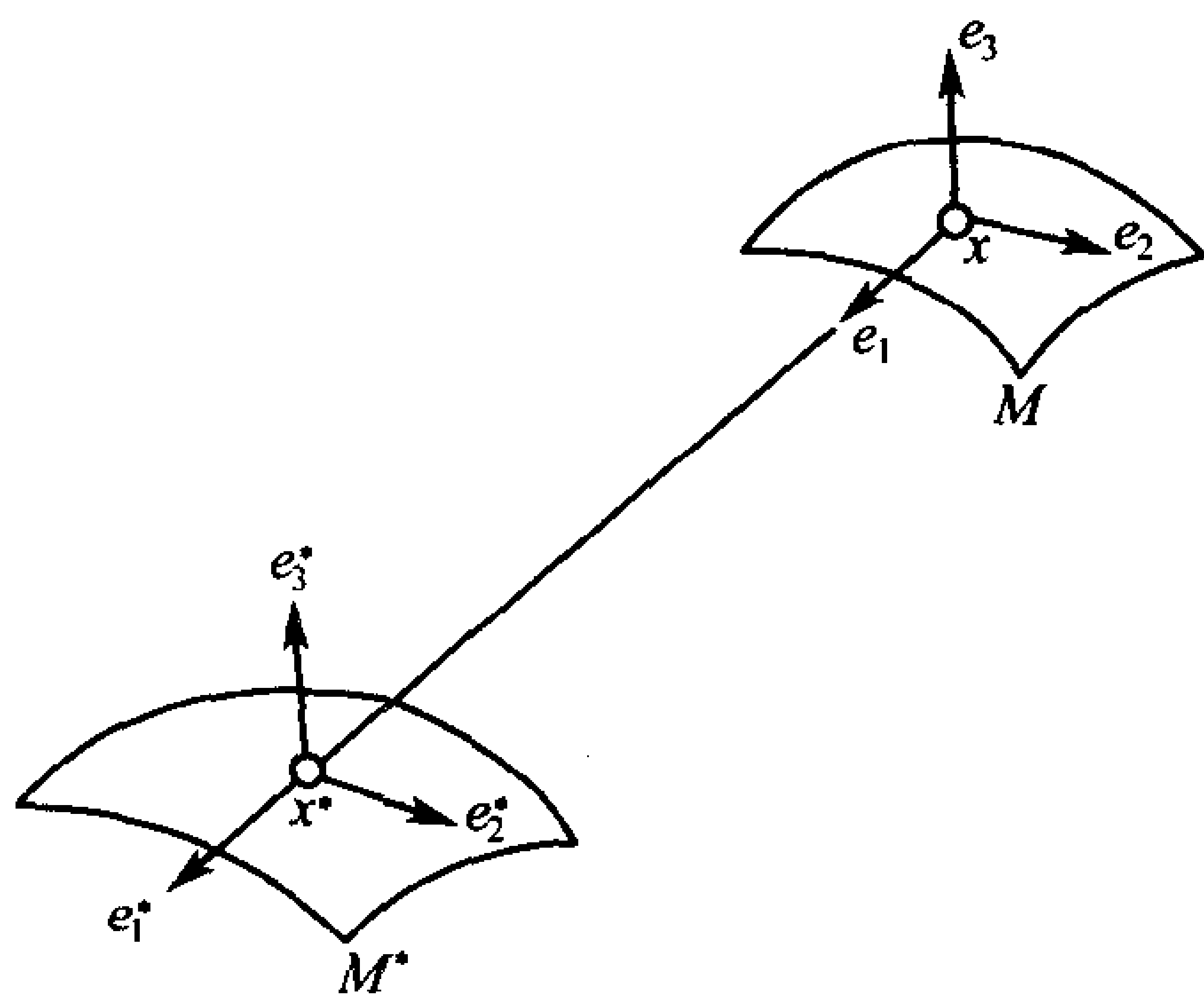


图 Ⅲ-7

$$x^* = x + re_1, \tag{6.19}$$

$$e_1^* = e_1, \tag{6.20}$$

$$e_2^* = \cos\tau\, e_2 + \sin\tau\, e_3, \tag{6.21}$$

$$e_3^* = -\sin\tau\, e_2 + \cos\tau\, e_3. \tag{6.22}$$

以下,我们根据上述方程来计算 M,M^* 的 Gauss 曲率.

从结构方程和(6.20)、(6.21),有

$$\mathrm{d}x^* = \omega^{1*}e_1^* + \omega^{2*}e_2^* = \omega^{1*}e_1^* + \omega^{2*}(\cos\tau\, e_2 + \sin\tau\, e_3).$$

但由(6.19),有

$$\mathrm{d}x^* = \mathrm{d}x + r\mathrm{d}e_1 = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + r(\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3).$$

比较上述两式,得

$$\omega^{1*} = \omega^1, \tag{6.23}$$

$$\omega^{2*}\cos\tau = \omega^2 + r\omega_1^2, \tag{6.24}$$

$$\omega^{2*}\sin\tau = r\omega_1^3. \tag{6.25}$$

从(6.23)和(6.25)得

$$\begin{aligned}\omega^{1*}\wedge\omega^{2*} &= \frac{r}{\sin\tau}\omega^1\wedge\omega_1^3\\ &= \frac{r}{\sin\tau}\omega^1\wedge(b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2)\\ &= \frac{rb_{12}}{\sin\tau}\omega^1\wedge\omega^2.\end{aligned} \tag{6.26}$$

因此,$b_{12}\neq 0$.

从(6.20)、(6.22)有

$$\omega_1^{3*} = (\mathrm{d}e_1^*, e_3^*) = -\sin\tau\omega_1^2 + \cos\tau\omega_1^3.$$

但由(6.24)和(6.25)得

$$\frac{\sin\tau}{r}\omega^2 + \sin\tau\,\omega_1^2 = \omega^{2*}\cdot\frac{\sin\tau\cos\tau}{r} = \cos\tau\,\omega_1^3.$$

代回上式,得

$$\omega_1^{3*} = \frac{1}{r}\sin\tau\,\omega^2.$$

从(6.21)和(6.22)得

$$\omega_2^{3*} = (de_2^*, e_3^*) = \omega_2^3 = b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2 \quad (b_{21} = b_{12}).$$

因此

$$\omega_1^{3*} \wedge \omega_2^{3*} = -\frac{\sin\tau}{r} b_{12}\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{6.27}$$

然而,对于 M^*,有

$$\omega_1^{3*} \wedge \omega_2^{3*} = -d\omega_1^{2*} = K^* \omega_1^* \wedge \omega_2^*,$$

其中 K^* 是 M^* 的Gauss曲率.因此把(6.26),(6.27)代回上式,由于 $b_{12} \neq 0$,便得

$$K^* = -\left(\frac{\sin\tau}{r}\right)^2.$$

交换 M, M^* 的地位,可见 M 的Gauss曲率 K 也为 $\left(-\frac{\sin\tau}{r}\right)^2$.证毕.

6.3 Bäcklund 变换

在上述的Bäcklund定理中,伪球线汇的一张焦曲面具有常负Gauss曲率 $-\left(\frac{\sin\tau}{r}\right)^2$,另一张焦曲面也然.于是它们就分别对应 SG 方程的两个解.由此可见,从 SG 方程的已知解寻找新解的问题,归纳为如何从一个常负Gauss曲率曲面 M 构造一个伪球线汇,这便是Bäcklund变换的几何表达.

考虑 M 上的向量场 e_1.为了使 e_1 方向的切线构成伪球线汇,从方程(6.24)、(6.25)知,应有

$$\omega^2 + r\omega_1^2 = r \operatorname{ctg}\tau\, \omega_1^3, \tag{6.28}$$

即

$$e_2 dx + re_2 de_1 = (r \operatorname{ctg}\tau) e_3 de_1. \tag{6.28'}$$

这是关于 e_1 的微分方程,称为Pfaff方程,它完全可积的充要条件是它的外微分方程是原方程的代数推论(可参见第一章,3.2,定理

3.2).

对(6.28′)两边外微分,注意到 r,τ 均为常数,利用结构方程,易得

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 + r\mathrm{d}\omega_1^2 = r\,\mathrm{ctg}\,\tau\,\omega_1^2 \wedge \omega_2^3. \tag{6.29}$$

再利用 Gauss 方程 $\mathrm{d}\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$ 及(6.28′),上式可化为

$$\begin{aligned}\mathrm{ctg}\,\tau(\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3) - \left(\frac{1}{r} + rK\right)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ = r\,\mathrm{ctg}^2\,\tau\,\omega_1^3 \wedge \omega_2^3.\end{aligned} \tag{6.30}$$

注意到

$$0 = \mathrm{d}\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

以及

$$K = -\left(\frac{\sin\,\tau}{r}\right)^2,$$

容易验证(6.30)恒成立.这就表示(6.29)是(6.28)的代数推论,从而(6.28)即(6.28′)完全可积.所以,这样的向量场 e_1 一定存在.

方程(6.28)就是 Bäcklund 变换.为了明显起见,我们把它化为另一种形状.

取曲率线作为坐标曲线,设 E_1,E_2 为单位切向量,它们互相垂直.设

$$\begin{aligned}e_1 &= \cos\,\alpha\,E_1 + \sin\,\alpha\,E_2,\\ e_2 &= -\sin\,\alpha\,E_1 + \cos\,\alpha\,E_2.\end{aligned} \tag{6.31}$$

于是,$\{x;E_1,E_2,e_3\}$ 和 $\{x;e_1,e_2,e_3\}$ 构成曲面 M 的两组标架,它们对应的微分形式记为 $\{\theta^i,\theta_\alpha^\beta\}$ 和 $\{\omega^i,\omega_\alpha^\beta\}$.通过简单的计算,有

$$\omega^2 = -\sin\,\alpha\,\theta^1 + \cos\,\alpha\,\theta^2,$$

$$\omega_1^2 = \mathrm{d}\alpha + \theta_1^2,$$

$$\omega_1^3 = \cos\,\alpha\,\theta_1^3 + \sin\,\alpha\,\theta_2^3.$$

将它们代入(6.28)，便得

$$d\alpha + \theta_1^2 = -\frac{1}{r}(-\sin\alpha\,\theta^1 + \cos\alpha\,\theta^2) + \operatorname{ctg}\tau(\cos\alpha\,\theta_1^3 + \sin\alpha\theta_2^3). \tag{6.32}$$

类似于(6.11)～(6.13)，有

$$\theta^1 = \sin\psi\,du^1,\quad \theta^2 = \cos\psi\,du^2,$$

$$\theta_1^3 = \cos\psi\,du^1,\quad \theta_2^3 = -\sin\psi\,du^2,$$

$$\theta_1^2 = -\frac{\partial\psi}{\partial u^2}du^1 - \frac{\partial\psi}{\partial u^1}du^2.$$

代入(6.32)，得到关于未知函数 α 的方程. 为简单起见，令 $K = -1$，即

$$r = \sin\tau,$$

则有

$$\begin{cases}\sin\tau\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u^1} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u^2}\right) = \cos\tau\cos\alpha\cos\psi + \sin\alpha\sin\psi,\\[2ex]\sin\tau\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u^2} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u^1}\right) = -\cos\tau\sin\alpha\sin\psi - \cos\alpha\cos\psi,\end{cases} \tag{6.33}$$

其中 τ 为常数；ψ 为已知解；α 为未知解. 容易看到，2α 是新曲面 M^* 上渐近线之间所成的角，因此也是 SG 方程的解. 这样，我们可以从 SG 方程的已知解 ψ，通过(6.33)而得到新的解 α.(6.33)关于 α 是一阶拟线性偏微分方程，因此可化为常微分方程求解.(6.33)就是通常所称的 Bäckund **变换**.

例如，SG 方程的一个明显解 $\psi = \pi/2$，对此用变换(6.33)，可得

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}\sin\tau = \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}\sin\tau = -\cos\tau\sin\alpha.$$

因此，

$$\cos\tau\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}+\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}=0.$$

令

$$v=(u^1-u^2\cos\tau)\frac{1}{\sin\tau},$$

则 $\alpha=\alpha(v)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=\sin\alpha,$$

即

$$\begin{cases}\cos\alpha\,(u^1,u^2)=-\operatorname{th}v,\\ \sin\alpha\,(u^1,u^2)=(\operatorname{ch}v)^{-1}.\end{cases}\tag{6.34}$$

这个解的物理意义如下：在物理上，$f(v-at)$ 一般称为**行波**. 若把 u^2 看成时间 t，u^1 看成距离，则 $\alpha(u^1,u^2)$ 也是一个行波. 当固定时间 t，把 α 看成距离 u^1 的函数时，它的图像如图 Ⅲ-8 所示.

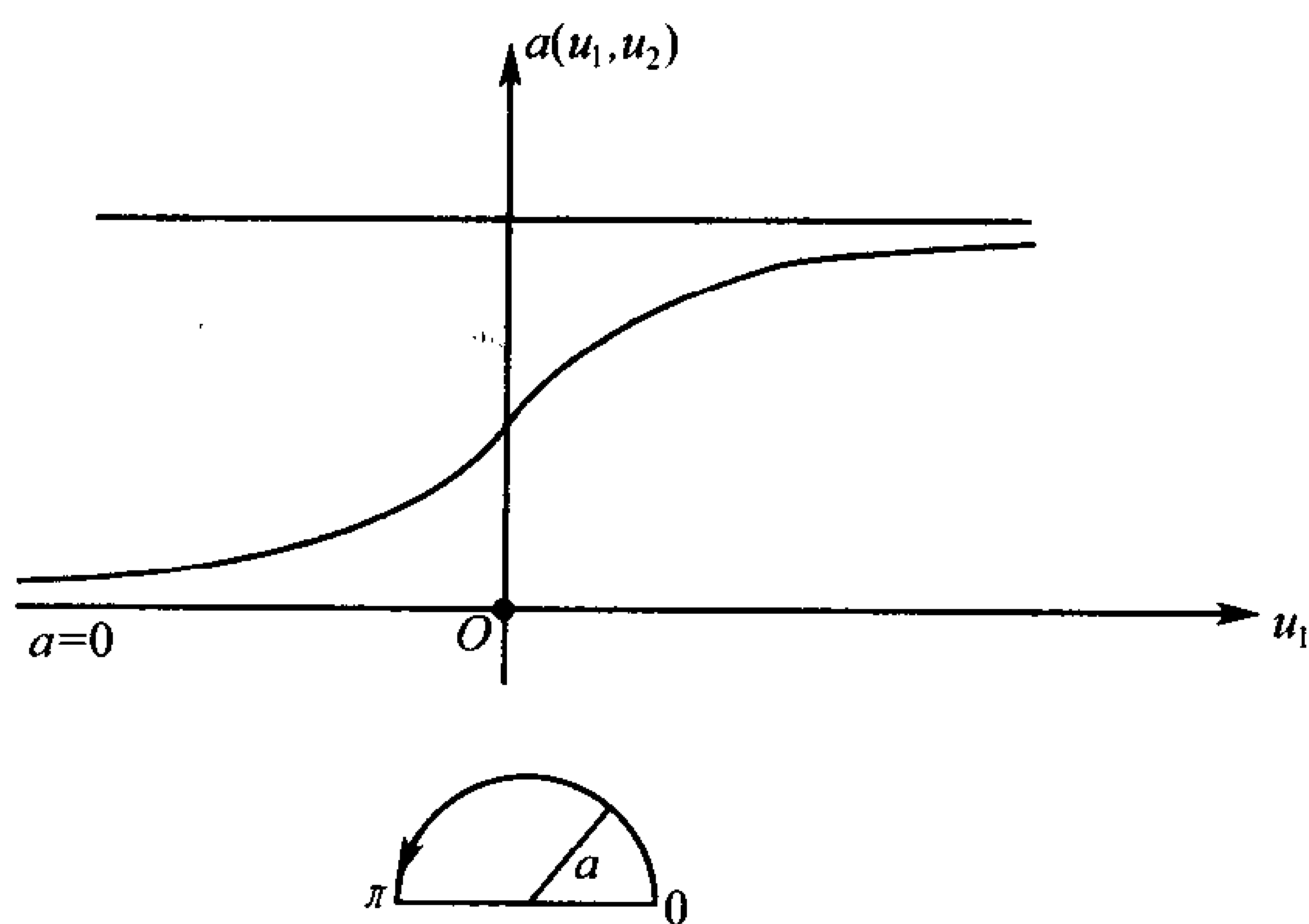


图 Ⅲ-8

把 $u^1=-\infty$ 与 $u^1=+\infty$“粘合”起来，则 α 在$(-\infty,+\infty)$

中转动了半周，2α 正好转动了一周（2π）. 因此，若 $\sin\tau > 0$，我们得到带有一个孤立子的解；若 $\sin\tau < 0$，则我们得到带有一个反孤立子的解.

注 本节内容取自陈省身教授1978年在北京大学的演讲[2]，进一步可参考文献 Ann. Polonici Math. ，1981，39：64 ～ 69.

关于孤立子的进一步的内容，可参考：谷超豪，胡和生，周子翔编写的《孤立子理论中的达布变换及其几何应用》，上海科学技术出版社，1999 年版.

习　　题

1. 详细验证（6. 8）、（6. 9）以及（6. 15）.

2. 设 M 和 M^* 是一个线汇的两张（非蜕化）焦曲面，$\varphi: M \to M^*$ 是自然映射，使 M 上一点 x 通过公切线变为 M^* 上的点 $x^* = \varphi(x)$. 令 $|x - x^*| = r(x)$，$e_3 \cdot e_3^* = \cos\tau(x)$. 试问：函数 $r(x)$ 和 $\tau(x)$ 满足什么条件才能使 M 和 M^* 的 Gauss 曲率 $K = K^* = -\sin^2\tau/r^2$？

§7　Hilbert 定理

根据本章 §2 中定理 2. 1，在 $\mathbf{E}^3$ 中不存在紧致连通的常负曲率曲面. 更一般地，有下列著名的 Hilbert 定理.

定理（**D. Hilbert**，1901）　在三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$ 中不存在 C^2 阶完备连通的常负曲率曲面.

所谓完备曲面，就是它作为二维度量空间是完备的. 关于它的等价定义，我们将在第四章 §2 中详细论述，现在暂且承认那里的定理 2. 3. 因此，紧致曲面一定是完备的，但完备曲面未必紧致.

可能读者会提出，曳物线旋转面 —— 伪球面不是一个完备连通的常负曲率曲面吗？然而，这个曲面不是 C^2 阶的，因为有一条

"喇叭口边"是曲面上奇点的集合.

Hilbert 定理的完全证明,要涉及许多分析和方程的知识,读者可参考本页脚注①的附录及有关文献.这里,我们对 C^3 阶的曲面给出证明,而定理对 C^2 阶曲面也成立.值得指出的是,定理对 C^1 阶曲面并不成立,因为 N. H. Kuiper 在 1955 年给出了双曲平面——具有度量 $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)/v$ 的上半平面(即 $v > 0$)——到 $\mathbf{E}^3$ 中的一个无奇点 C^1 阶等距嵌入(参考 Indagations Math.,1955,17:545～556;683～689).

此外,不失一般性,我们还可以进一步假定曲面 M 是单连通的,因为否则我们可用 M 的通用覆盖 $\widetilde{M}$(它与 M 等距对应,详细参阅第四章 §5,§6)来代替.

7.1 负曲率曲面上的渐近线网

我们首先给出有关常负曲率曲面 M 上的渐近线的一些局部性质.这里,不妨设 M 的 Gauss 曲率 $K = -1$.

引理 7.1 对于每点 $p \in M$,存在坐标映射 $f: U(\subset P\mathbf{R}^2) \to M$, $p \in f(U) = V$,使得 f 的坐标曲线网是 $V \subset M$ 上的渐近线网,并且它是 Chebyshev 网.

证明 由于 $K < 0$,故 p 点不可能是曲面 M 的脐点.于是存在坐标映射 $\tilde{f}: \widetilde{U} \to M$, $p \in \tilde{f}(\widetilde{U}) = \widetilde{V}$ 使得 $\tilde{f}$ 的坐标曲线网是 $\widetilde{V} \subset M$ 上的曲率线网.

根据(6.15),此时曲面片 $\widetilde{V} \subset M$ 的第一、第二基本形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \sin^2\psi\, \mathrm{d}\tilde{u}^2 + \cos^2\psi\, \mathrm{d}\tilde{v}^2, \\ \mathrm{II} &= (\sin\psi\cos\psi)(\mathrm{d}\tilde{u}^2 - \mathrm{d}\tilde{v}^2). \end{aligned} \tag{7.1}$$

于是,在 $\widetilde{V}$ 中渐近线的微分方程是

$$\mathrm{d}\tilde{u}^2 - \mathrm{d}\tilde{v}^2 = 0,$$

① T. K. Milnor, Advances in Math.,1972,8:474～543.

由此，得 $\widetilde{V}$ 中渐近线的方程为

$$\widetilde{u}+\widetilde{v}=\text{const.},\ \widetilde{u}-\widetilde{v}=\text{const.} \tag{7.2}$$

作坐标变换 $h:U\to\widetilde{U}$，定义如下：

$$\widetilde{u}=u-v,\quad \widetilde{v}=u+v. \tag{7.3}$$

于是，在新坐标 $(u,v)\in V$ 下，$f=\widetilde{f}\cdot h:U\to M,\ f(U)=V$，渐近线方程是

$$u=\text{const.},\quad v=\text{const.}, \tag{7.4}$$

即它们是坐标曲线网. 容易计算，这时 $V\subset M$ 的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+2\cos\alpha\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2\quad(\alpha=2\psi). \tag{7.5}$$

这表明坐标曲线网是 Chebyshev 网. 引理证毕.

引理 7.2 设 $V\subset M$ 是某个坐标邻域，使得 V 的坐标曲线是渐进线. 那么，由坐标曲线构成的任何曲边四边形的面积必小于 2π.

证明 根据引理 7.1，我们可取到 Chebyshev 网，使 $V\subset M$ 的第一基本形式有(7.5)的形式.

根据(6.14)，我们有

$$\psi_{\widetilde{u}\widetilde{u}}-\psi_{\widetilde{v}\widetilde{v}}=-\sin\psi\cos\psi\quad\left(\psi=\frac{\alpha}{2}\right).$$

在代换(7.3)下，得

$$\psi_{uv}=\sin\psi\cos\psi,$$

因此，对于 $\alpha=2\psi$，就有

$$\alpha_{uv}=\sin\alpha. \tag{7.6}$$

设 A 是 V 中以四点 $(u_1,v_1),(u_2,v_1),(u_2,v_2),(u_1,v_2)$ 为顶点的坐标曲线四边形，如图 Ⅲ-9 所示.

由于 $E=G=1,\ F=\cos\alpha$，以及(7.6)，我们有

$$A\text{ 的面积}=\int_A\mathrm{d}A=\int_A\sin\alpha\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_A\alpha_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

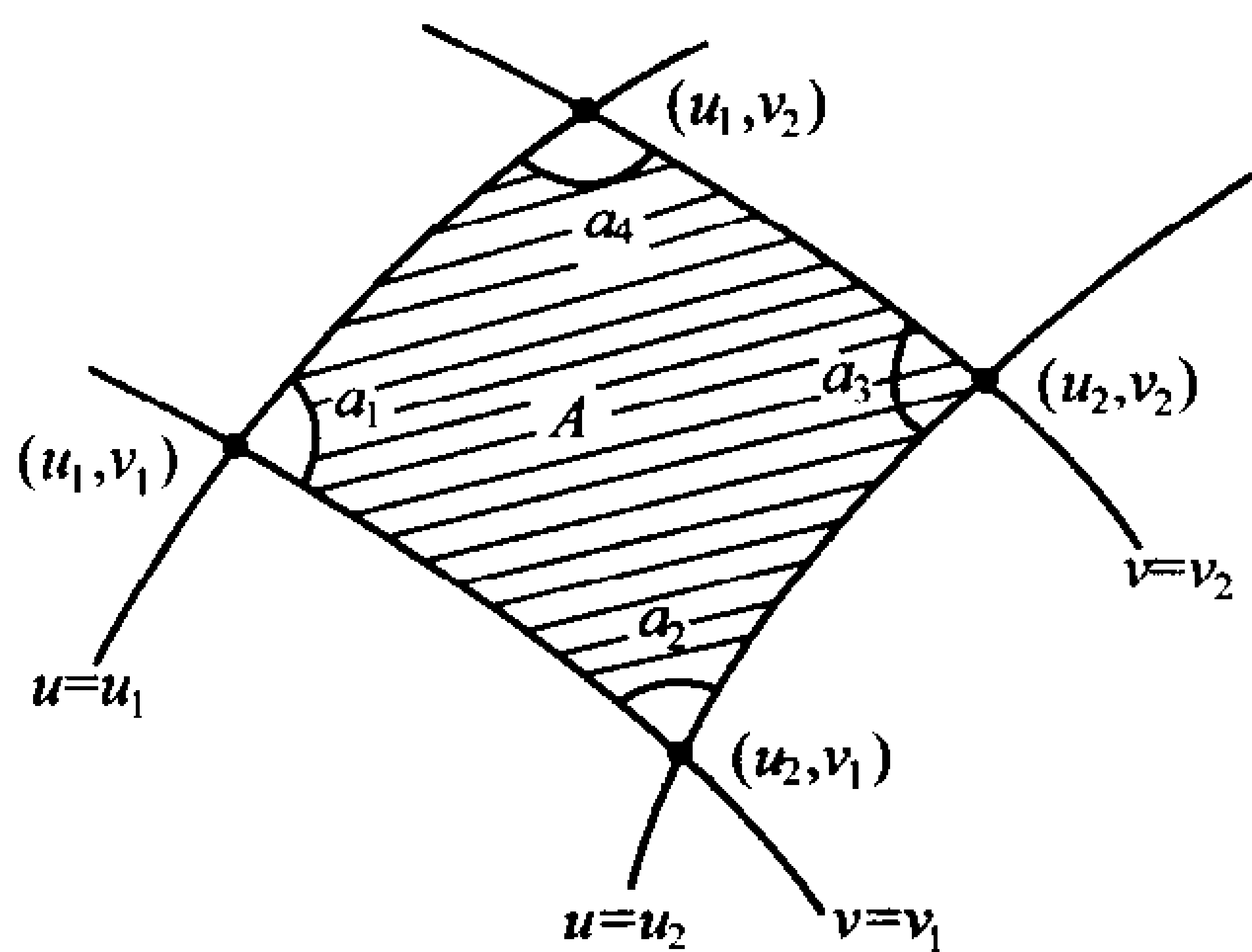


图 Ⅲ-9

$$= \alpha(u_1,v_1) - \alpha(u_2,v_1) + \alpha(u_2,v_2) - \alpha(u_1,v_2)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_3) - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4)$$
$$= \sum_{i=1}^{4}\alpha_i - 2\pi < 2\pi,$$

最后一个不等式是由于 $\alpha_i < \pi$. 证毕.

7.2 常负曲率完备曲面上的整体渐近线网

对于完备的常负曲率曲面 M,我们将定义一个坐标映射 $f:\mathbf{R}^2 \to M$,并证明它是 M 上整体定义的渐近线网.

任取固定点 $O \in M$,过 O 作渐近线 a_1 和 a_2,并选定它们的正向(见图 Ⅲ-10). 现定义 $f:\mathbf{R}^2 \to M$ 如下:对于每点 $(u,v) \in R^2$,在 a_1 沿它的正方向取弧长等于 u 的一点 p,于是,在点 $p \in M$ 存在两条渐近线,其中一条便是 a_1(由微分方程的唯一性定理).

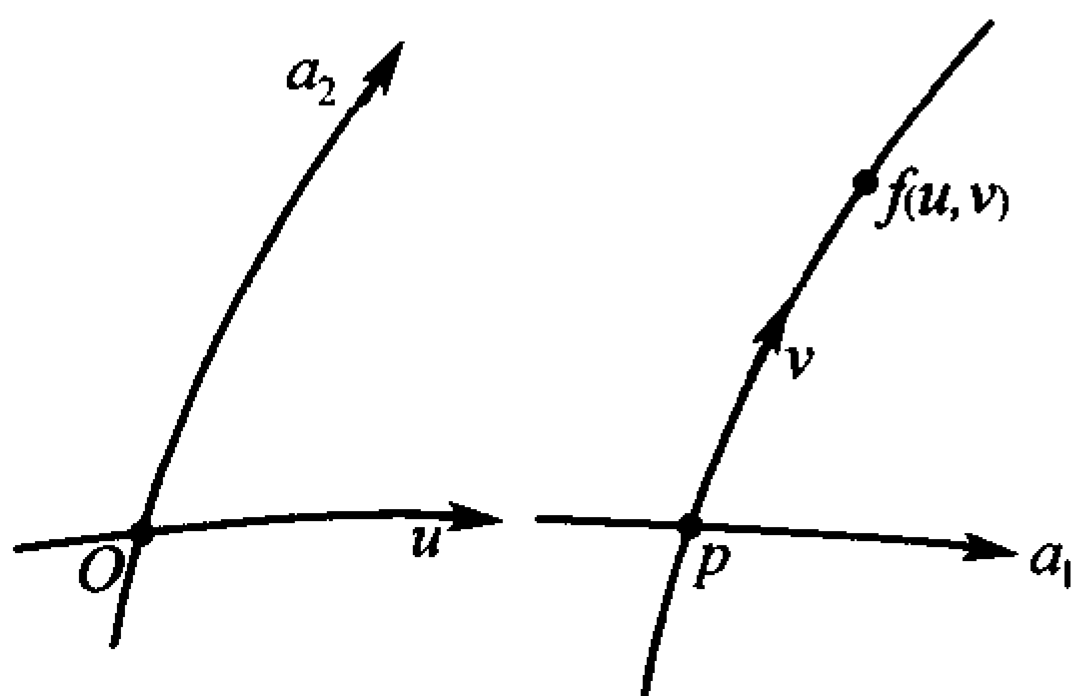


图 Ⅲ-10

在另一条渐近线上沿着与a_2定向一致的方向取弧长(从p点算起)等于v的一点,定义它为(u,v)的像$f(u,v)$(见图 Ⅲ-10).这样的$f(u,v)$在整个$\mathbf{R}^2$上有定义.事实上,若$f(u,0)$没有定义,则存在u_1使得$a_1(u)$对一切$u < u_1$有定义,而当$u = u_1$时没有定义.令$\lim_{u \to u_1} a_1(u) = q$,由于曲面$M$的完备性,$q \in M$.对$q$点利用引理7.1,则$a_1(u_1)$就有定义,这与假设矛盾.因此,对一切$u \in \mathbf{R}$,$f(u,0)$都有定义.同理,对一切$v \in \mathbf{R}$,$f(u,v)$也都有定义.

以下,我们要证明映射f是曲面M的坐标映射,并且构成渐近线网.

引理 7.3 对于任一固定的v,曲线$f(u,v)(-\infty < u < +\infty)$是$M$上以弧长为参数的渐近线.

证明 根据引理7.1,对于每点$f(u,v) \in M$,存在一个矩形邻域(即对应于$v_a < v < v_b$, $u_a < u < u_b$),使得这个邻域内的渐近线构成Chebyshev网,即参数曲线所构成的四边形的对边长相等.因此,若对某个$v_0 \in (v_a,v_b)$,曲线$f(u,v_0)$,$u \in (u_a,u_b)$,是渐近线,则对于任何$v \in (v_a,v_b)$,曲线$f(u,v)$,$u \in (u_a,u_b)$,都是渐近线.

现令(u_1,v_1)是M上任一点,对于$0 \leqslant v \leqslant v_1$,线段$f(u_1,v)$是闭的,故是紧致的,从而它可用有限多个矩形邻域覆盖(见图 Ⅲ-11),使得其中每个矩形邻域都由渐近线构成Chebyshev网.因为$f(u,0)$是渐近线(即a_1),故重复上面的过程,可知$f(u,v_1)$是u_1的一个邻域内的渐近线.由于(u_1,v_1)的任意性,因此引理7.3得证.

引理 7.4 f是满映射.

证明 首先,f是局部微分同胚.这是因为一方面$f(u_0,v)$,$f(u,v_0)$都是以弧长为参数的渐近线,另一方面从引理7.1,M可以局部地导入渐近线网,使$E = G = 1$,因此,f必局部地和这样的参数曲线网一致.

其次,令 $W = f(\mathbf{R}^2)$,我们要证明 $W = M$.

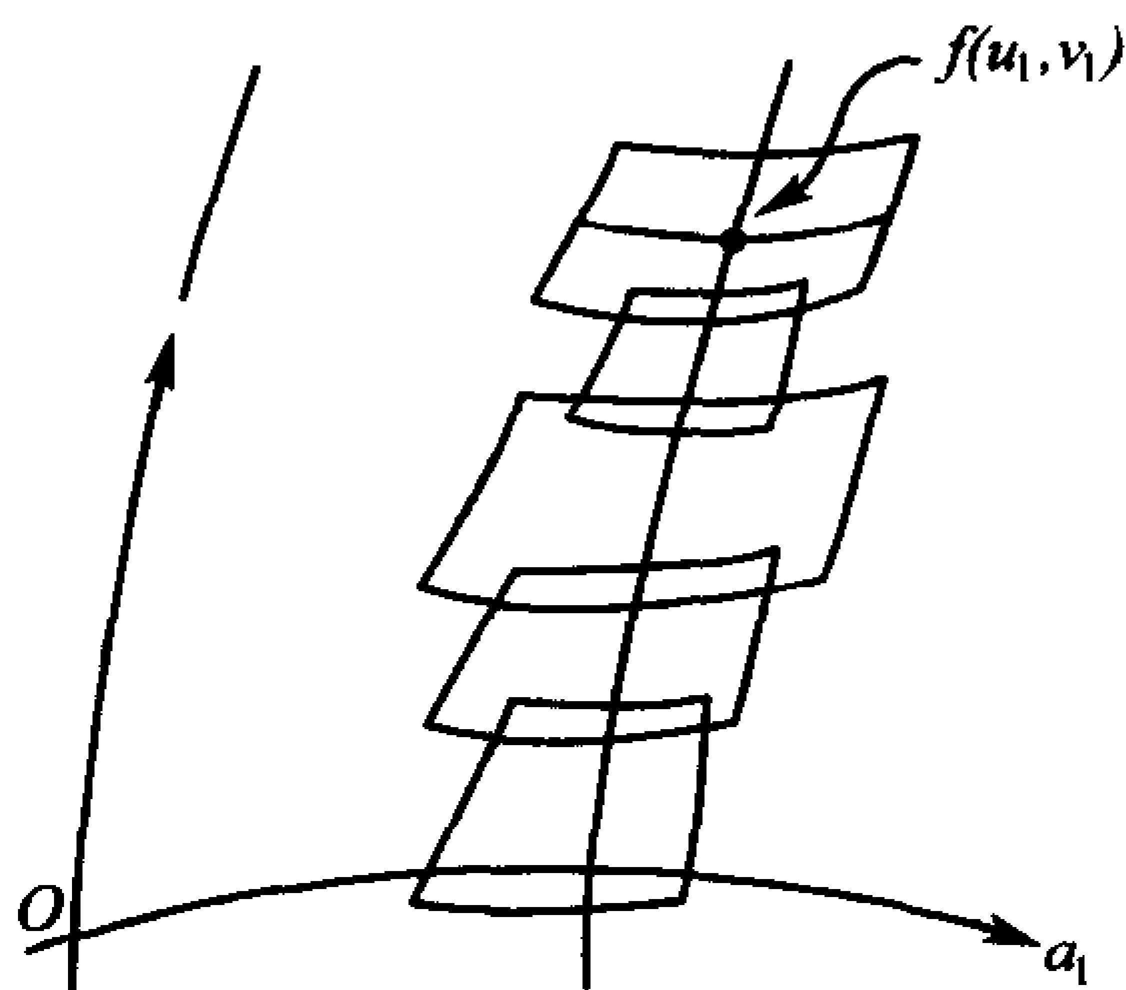


图 Ⅲ-11

由于 f 是局部微分同胚,故 W 在 M 中是开的. 注意,根据 f 的定义及引理 7.3,对于任一点 $p = f(u_0, v_0) \in M$,过 p 的两条渐近线都整体包含在 W 之中.

现在设 $W \neq M$. 由于 M 是完备单连通的,故 W 的边界 $\partial W \neq \varnothing$. 设 $p \in \partial W$,由于 W 是开的,故 $p \overline{\in} W$. 考虑包含 p 的一个矩形邻域 $A \subset M$,使得在 A 中,渐近线网构成 Chebyshev 网,见图 Ⅲ-12. 若 $q \in W \cap A$,则过 q 的一条渐近线与过 p 的一条渐近线相交于一点 m. 若 $m \in W$,则过 m 的渐近线(它整体位于 W 中)不能通过 $p(\overline{\in} W)$. 若 $m \overline{\in} W$,则过 q 的渐近线不能通过 m,由此得到矛盾. 因此 $W = M$,引理 7.4 证毕.

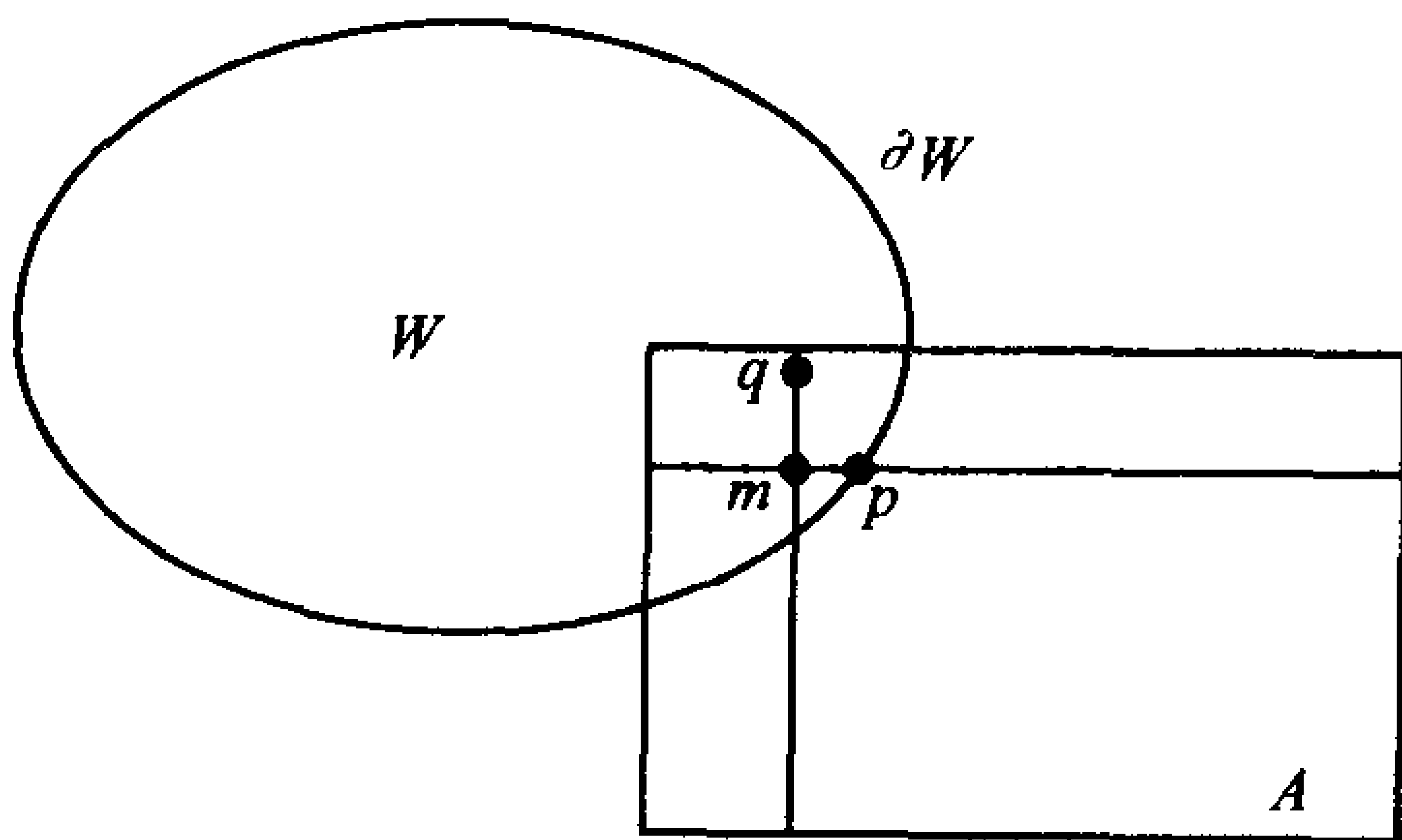


图 Ⅲ-12

引理 7.5 f是单一映射.

证明 根据引理 7.3 和引理 7.4,我们通过f已在M上整体地定义了两族渐近线,不妨称它们为第(Ⅰ)族和第(Ⅱ)族.为了证明f是单一映射,只要证明,一族中的每条渐近线与另一族中的任一条渐近线最多只有一个交点.用反证法,假设第(Ⅰ)族中一条渐近线和第(Ⅱ)族中某条渐近线相交有两点A和B.于是,这两条渐近线围成一个区域Ω.以下分两种情况讨论.

第一种情况:这两条相交于A和B的渐近线的延长线都不进

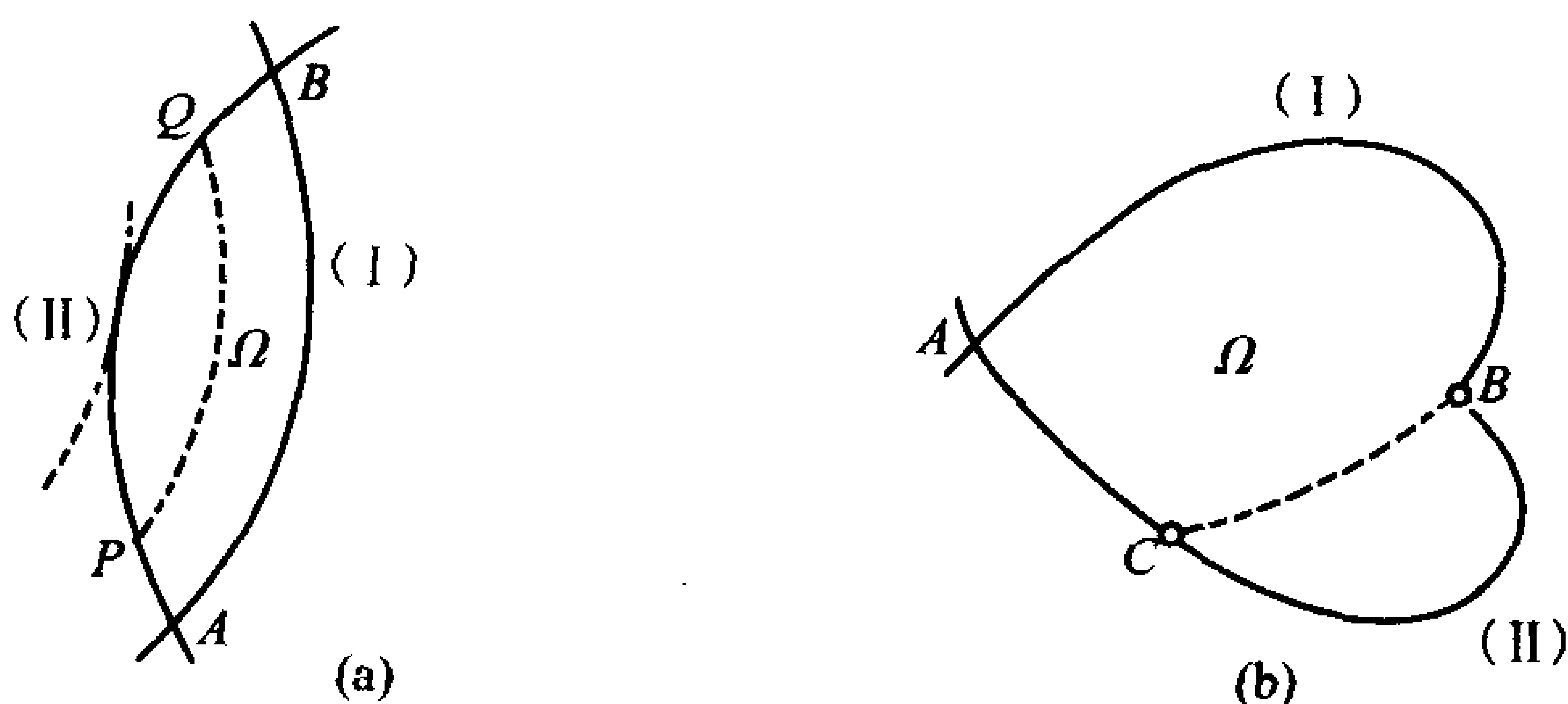


图 Ⅲ-13

入区域Ω(见图 Ⅲ-13(a)).设P是第(Ⅱ)族AB线上一点(位于A,B之间),考虑过P的第(Ⅰ)族的渐近线(图 Ⅲ-13(a)中虚线所示).因为它不可能与第(Ⅰ)族的AB线相交,故只能与第(Ⅱ)族的AB线相交,不妨设第一个交点为Q(也位于A,B之间).于是,当P沿着渐近线从A向B移动,Q从B向A移动时,必于某一点重合,在这个重合点,两族渐近线中有两条相切,即在该点两个渐近线方向重合.这与$K=-1<0$的假设矛盾,因此这种情况不可能发生.

第二种情况:这两条相交于A和B的渐近线中至少有一条的延长线进入区域Ω(见图 Ⅲ-13(b)).假设第(Ⅰ)族的渐近线通过

交点 B 进入 Ω,那么它将和第(Ⅱ)族的渐近线相交于某点 C(见图Ⅲ-13(b) 中虚线所示),于是第(Ⅰ)族的 BC 线和第(Ⅱ)族的 BC 线构成了如图 Ⅲ-13(a) 所示的第一种情况.这是不可能的.

综合这两种情况,便得引理 7.5 的证明.

根据引理 7.3、引理 7.4 和引理 7.5,可见坐标映射 $f:\mathbf{R}^2\to M$ 在 M 上整体定义了一个渐近线网,并且是 Chebyshev 网.因此,第一基本形式(7.5)在 M 上整体地被给出.

7.3 定理的证明

用反证法.假设存在这样的完备曲面.一方面,根据本章 7.2 的讨论,我们可在 M 上整体地导入渐近线网,并且它是 Chebyshev 网,再利用引理 7.2,可见 M 的面积小于 2π.

另一方面,由于 M 是完备单连通的,故对于任一点 $p\in M$,指数映射 $\exp_p$ 是可微分同胚(参考第四章 §5,定理 5.4).因此,我们可在 M 上整体地建立以 p 为极点的测地极坐标系(ρ,θ),而 M 的第一基本形式化为(参见[1],p. 152)

$$\mathrm{I} = (\mathrm{d}\rho)^2 + (\mathrm{sh}\rho)^2(\mathrm{d}\theta)^2, \tag{7.7}$$

它也是整体地被给出.于是,由直接计算,得

$$\begin{aligned} M\text{ 的面积} &= \lim_{d\to\infty}\left[\iint_{\rho\leq d}\sqrt{EG}\,\mathrm{d}A\right] \\ &= \lim_{d\to\infty}\left[\int_0^d\int_0^{2\pi}\sqrt{G}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\right] \\ &= \lim_{d\to\infty}[2\pi(\mathrm{ch}d-1)]\to\infty. \end{aligned}$$

这与上面所说的 M 的面积有限相矛盾.定理证毕.

注 Hilbert 定理被俄罗斯的 Ефимов 推广到负曲率的完备曲面(见 Mat. Сб., 1964,64(106):286 ~ 320.),即

定理 (Ефимов, Н. Ф., 1964) $\mathbf{E}^3$ 中不存在 C^2 阶完备曲面,使

它的 Gauss 曲率 $K \leqslant -c < 0$.

后来,美国的 T. K. Milnor 重新整理了 Ефимов 的证明,用更清晰的方式表达(见 Adv. Math. ,1972,8:474～543). 在该文的附录中给出了 Hilbert 定理的另一证明. 我们这里的证明参照文献[3]和[4]. Hilbert 定理的高维推广至今还未彻底解决.

习　题

1. (J. J. Stoker) 试证 $\mathbf{E}^3$ 中不存在这样的 C^3 阶完备曲面,它的 Gauss 曲率 $K \leqslant -c < 0$ 且它的平均曲率的绝对值有界(参考[3], p. 450).

2. 详细验证(7.5),并证明图 Ⅲ-9 坐标曲线四边形的对边长度相等.

§8　Hartman-Nirenberg 定理

本节讨论 Gauss 曲率 $K \equiv 0$ 的完备曲面. 从局部微分几何知道,这样的曲面局部是可展曲面,即是平面、柱面、锥面或切线曲面. 但当我们从整体考虑时,就得到不同的结果.

定理 (**P. Hartman** & **L. Nirenberg**,1959)　设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中 Gauss 曲率恒为零的完备曲面,则 M 必是平面或柱面.

这里,曲面的完备性起了重大作用.

8.1　预备引理

为了证明上述定理,我们先给出若干预备引理.

引理 8.1　设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中 Gauss 曲率 $K \equiv 0$ 的正则曲面,则 M 上平点的集合 V 在 M 中是闭的,从而抛物点的集合 $U = M \backslash V$ 在 M 中是开的.

证明 设 k_1, k_2 是 M 的主曲率. 因为 $K = k_1k_2 = 0$,故 M 上的点或是平点,或是抛物点. 对于平点,平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$. 若 $p \in M$ 是平点集合 V 的极限点,则根据函数 H 的连续性,$H(p) = 0$. 又因 $K = 0$,故在 p 点必有 $k_1 = k_2 = 0$,即 p 也是平点. 因此,$p \in V$,即 V 在 M 中是闭的. 证毕.

现设 $p \in U$ 是抛物点,则在 p 有唯一的一个实渐近方向. 我们要证明相应的渐近线是直线段.

引理 8.2 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中使 $K \equiv 0$ 的正则曲面,$p \in U \subset M$ 是抛物点,则过 p 的唯一渐近线是 M 上的(开)直线段.

证明 因为 p 不是脐点(平点),故存在包含 p 的邻域 $W \subset U$ 使得 W 中都不是脐点. 在 W 上选取曲率线参数网 (u, v),使曲面方程为 $x = x(u, v)$. 设 u 曲线是渐近线,即它对应的主曲率 $k_1 = 0$. 取幺正标架 $e_1 = x_u/\sqrt{E}$, $e_2 = x_v/\sqrt{G}$, $e_3 = n$(曲面的法向量),其中 $E = |x_u|^2$, $G = |x_v|^2$. 于是有(见本章 §2,(2.7) 和(2.8))

$$\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v,$$

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = k_2\omega^2.$$

由运动方程及上式,得

$$\mathrm{d}e_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 = -k_2\omega^2 e_2 = -k_2\sqrt{G}\,e_2\mathrm{d}v.$$

因此,$n_u = \frac{\partial n}{\partial u} = \frac{\partial e_3}{\partial u} = 0$,即在 W 中处处有 $n_u = 0$. 于是,

$$\frac{\partial}{\partial u}(x \cdot n) = x_u \cdot n + x \cdot n_u = 0,$$

因此

$$x \cdot n = \psi(v), \tag{8.1}$$

其中 $\psi(v)$ 仅是 v 的函数. 把(8.1) 关于 v 求导,得

$$x \cdot n_v = \psi'(v). \tag{8.2}$$

另一方面,$n_v \cdot n = 0$,并且因为 W 中的点都是抛物点,$k_2 \neq 0$,故 n_v

$= \frac{\partial e_3}{\partial v} \neq 0$. 这样,$n$ 和 n_v 是相互正交的线性无关的向量. 此外,在 W 中有 $n_{uv} = n_{vu} = 0$.

现考虑 W 中任一 u 线:$v = v_0$(常数). 沿着它法向量 $n(u,v_0) = n(v_0)$(因为 $n_u = 0$),$n_v(u,v_0) = n_v(v_0)$(因为 $n_{vu} = 0$). 因此,方程(8.1)表明 u 曲线 $x(u,v_0)$ 属于以 $n(v_0)$ 为法向量的平面;而方程(8.2)表明这曲线又属于以 $n_v = v_0$ 为法向量的平面,且这两个平面是相互正交的. 所以,渐近线 $x(u,v_0)$ 是开的直线段. 证毕.

曲面 M 上一条渐近线称为**最大的**,如果它不是某条渐近线的真子集.

引理 8.3(**W. S. Massey**, 1962) 设 γ 是过抛物点 $p \in U \subset M$ 的最大渐近线,则 $\gamma \cap V = \varnothing$,即 γ 上没有平点.

证明 与引理 8.2 一样,在包含 p 的一个邻域 $W \subset U$ 中选取曲率线参数网 (u,v),并设 u 曲线是渐近线. 由于 $\omega_1^3 = 0$,设 $\omega_1^2 = p\omega^1 + q\omega^2$,则

$$0 = \mathrm{d}\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = pk_2\omega^1 \wedge \omega^2.$$

既然 $k_2 \neq 0$,故 $p = 0$. 根据第一章的(3.22)式,$p = \mathrm{d}\omega^1/(\omega^1 \wedge \omega^2)$,因此 $\mathrm{d}\omega^1 = 0$. 把 $\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u$ 代入,得 $(\sqrt{E})_v = 0$,即 E 仅是 u 的函数. 这样,只要作变量代换 $\bar{u} = \int \sqrt{E(u)}\mathrm{d}u$,可以使 $E = 1$,从而 $\omega^1 = \mathrm{d}u$.

对 $\omega_2^3 = k_2\omega^2$ 两边外微分,利用结构方程并注意到 $\omega_1^3 = 0$,得

$$(\mathrm{d}k_2 + k_2 q\omega^1) \wedge \omega^2 = 0,$$

即

$$\left(\frac{\partial k_2}{\partial u} + k_2 q\right)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

因此

$$\frac{\partial k_2}{\partial u} = -k_2 q. \tag{8.3}$$

因为 $K = 0$，对 $\omega_1^2 = q\omega^2$ 两边外微分，易得

$$\frac{\partial q}{\partial u} = -q^2. \tag{8.4}$$

由(8.3)和(8.4)可算得

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{k_2}\right) = 0. \tag{8.5}$$

因为平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}k_2$，故上式即

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{H}\right) = 0.$$

注意到 u 是渐近线的弧长参数，因此上式表明沿 W 中任一条渐近线有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{1}{H}\right) = 0, \tag{8.6}$$

其中 s 是渐近线的弧长参数.

现设 γ 是过抛物点 $p \in U \subset M$ 的最大渐近线，s 是从 p 点算起 γ 曲线的弧长参数. 如果在 γ 上有一平点 $q \in V$，由于 γ 是连通的且 U 是开的，故存在一点 $q_0 \in \gamma$，对应于参数 $s = s_0$，使得当 $s < s_0$ 时，γ 上的一切点都属于 U，而 $q_0 \in V$（见图 Ⅲ-14）.

根据(8.6)，可知沿着 γ，对于 $s < s_0$，恒有

$$H(s) = \frac{1}{as + b}, \tag{8.7}$$

其中 a, b 是常数（沿着 γ）. 因为在平点 q_0 平均曲率等于零，根据 H 的连续性和(8.7)，我们有

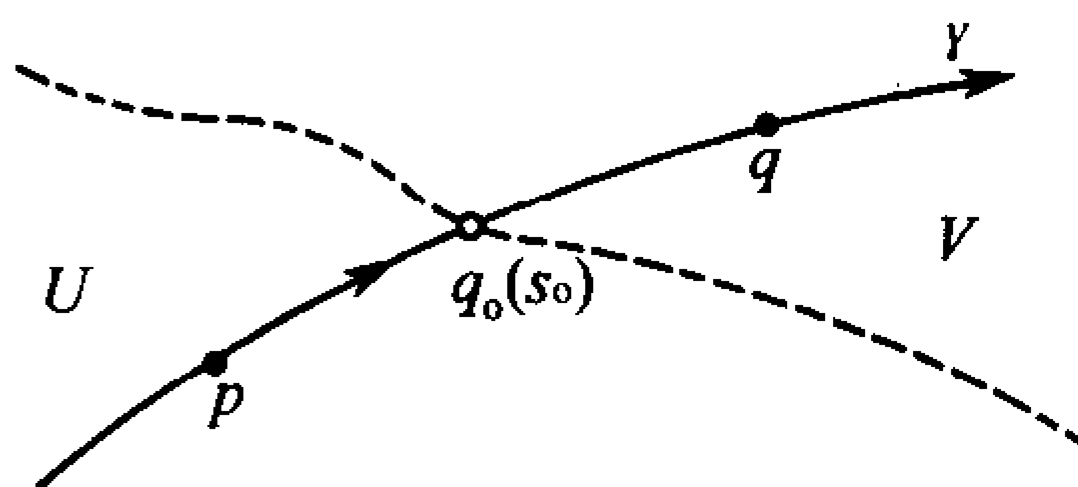


图 Ⅲ-14

$$0 = H(s_0) = \lim_{s \to s_0} H(s) = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{as + b} \neq 0.$$

这个矛盾就证明了我们的引理 8.3.

我们定义抛物点的集合 U 的边界如下：若 $p \in \partial U$，则在 p 的任一邻域 $W \subset M$ 中既有 U 的点，又有 $V = M \backslash U$ 的点. 同样可定义平点集合 V 的边界 ∂V. 因为 U 是开的，故 $\partial U \subset V$，由于 V 是闭的，故 $\partial V \subset V$，根据 ∂U 和 ∂V 的定义，可知

$$\partial U = \partial V \subset V. \tag{8.8}$$

引理 8.4(**W. S. Massey**, 1962) 设 M 是 $K = 0$ 的正则曲面，U 是 M 上抛物点的集合. 若 $p \in \partial U \subset M$，则过 p 点只存在唯一的开直线段 $C(p) \subset M$，而且 $C(p) \subset \partial U$，即 U 的边界 ∂U 是由直线段所组成.

证明 设 $p \in \partial U$，则可以选取点列 $\{p_n\}$，$p_n \in U$，使 $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$. 根据引理 2，对于每点 p_n，令 $C(p_n)$ 是过 p_n 的最大渐近线（开的直线段）. 我们要证明，当 $n \to \infty$ 时 $C(p_n)$ 的方向收敛于某个不依赖于 $\{p_n\}$ 的选择的方向.

事实上，设 $S^2 \subset \mathbf{E}^3$ 是以 p 为中心的充分小球面. 因为 S^2 是紧致的，故 $C(p_n)$ 与 S^2 的交点集合 $\{q_n\}$ 至少有一个聚点 $q \in S^2$，以及 q 的对径点. 现在假设除 q 外还有一个聚点 q' 及其对径点，那么经过任意近的两点 p_n 和 p_m（当 m, n 充分大时）都应有渐近线 $C(p_n)$ 和 $C(p_m)$，它们作成一个角度，其值大于 $\theta = \frac{1}{2}$（角度(pq, pq')），这与渐近线的连续性矛盾. 因此，上述聚点 q 及其对径点是唯一的，从而 $C(p_n)$ 有一个唯一的极限方向. 采用同样的方法，不难证明这个极限方向与点列 $\{p_n\}$ 的选择无关.

因为 $C(p_n)$ 的方向收敛，并且 $p_n \to p$，故 $C(p_n)$ 的开直线段收敛于过 p 点的一条开直线段 $C(p) \subset M$. 线段 $C(p)$ 不可能蜕化成点 p，因为否则的话，由于 $C(p_n)$ 是最大的，故 $p \in M$ 将是 $C(p_n)$ 的端点的极限点，根据引理 8.3，它不属于 V，这和 $p \in \partial U \subset V$ 矛盾. 当然，线段 $C(p)$ 不可能包括它的端点.

最后，我们要证明 $C(p) \subset \partial U$. 事实上，若 $q \in C(p)$，则存在

点列$\{q_n\}$,$q_n \in C(p_n) \subset U$,$\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$. 于是$q \in U \cup \partial V$. 假定$q \notin \partial U$,则$q \in U$. 根据渐近方向的连续性,$C(p)$是过$q$点的唯一渐近线;根据引理8.3,这意味着$p \in U$,从而与$p \in \partial U$矛盾. 所以$q \in \partial U$,即$C(p) \subset \partial U$. 引理8.4证毕.

8.2 定理的证明

设M不是平面,则M必包含抛物点. 令U是抛物点的集合(在M中是开的),V是平点集合(在M中是闭的),用$\mathrm{int}V$表示V的内部,即若$q \in \mathrm{int}V$,则存在包含q的一个邻域$W \subset V$. 显然,$\mathrm{int}V$在M中是开的,它只包含M的平点,因此,$\mathrm{int}V$的每个连通分支位于一个平面上.

我们先要证明:若M上的点$q \notin \mathrm{int}V$,则过q存在唯一的直线$l(q) \subset M$,并且任何这样的两条直线,或者重合,或者不相交.

事实上,当$q \in U$时,过q存在唯一的最大渐近线γ. 它是直线段(因而是测地线),并且$\gamma \cap V = \varnothing$(引理8.3). 在$\gamma$上取弧长作参数后,不难发现,$\gamma$是无限长的. 因为否则的话,$M$上将存在不能(以弧长)无限延长的测地线,这与$M$的完备性矛盾(参考第四章§2,定理2.3). 所以γ是整条直线$l(q)$,并且因为$\gamma \cap V = \varnothing$,故$l(q) \subset U$. 现在如果有另一点$p \in U$,$p \notin l(q)$,则$l(p) \cap l(q) = \varnothing$,因为否则过它们的交点(抛物点)将存在两条渐近线,这是不可能的.

另一方面,若$q \in \partial U = \partial V$,根据引理8.4,过$q$点存在唯一的位于$\partial U$中的开直线段,和上面的论证一样,这条直线段可以无限延长,使整个直线$l(q) \subset \partial U$,并且若$p \in \partial U$,$p \notin l(q)$,则$l(q) \cap l(q) = \varnothing$.

显然,由于U是开的,故若$q \in U$而$p \in \partial U$,则$l(q) \cap l(p) = \varnothing$.

这样,经过$U \cup \partial U = M \backslash \mathrm{int}V$的每点,存在唯一的一条直线,

它位于 $M\setminus \mathrm{int}V$ 中. 这样的两条直线或者重合,或者不相交. 如果我们能证明这些直线相互平行,则 $\partial U(=\partial V)$ 就由平行线组成,并且 $\mathrm{int}V$ 的每个连通分支是一个平面的开子集,它以两条这样的平行直线为边界. 因而,过每点 $t\in \mathrm{int}V$ 存在唯一的一条直线 $l(t)\subset \mathrm{int}V$,并且 $l(t)$ 平行于一个公共方向. 由此可见,经过 M 上每一点,都有唯一的直线,它们彼此平行,即 M 是柱面,这就是我们所要证明的.

为了证明过 $U\cup\partial U$ 中点的那些直线平行,我们可通过指数映射来进行. 设 $p\in U,q\in U\cup\partial U$,因为 M 是连通的,故存在弧段 $\alpha:[0,1]\to M$,使得 $\alpha(0)=p,\alpha(1)=q$. 根据 M 的完备性,指数映射 $\exp_p:T_p(M)\to M$ 是覆盖映射,并且局部等距(参考第四章). 令 $\tilde{\alpha}:[0,1]\to T_p(M)$ 是 α 的提升,使得 $T_p(M)$ 的原点在 $\tilde{\alpha}(0)$. 对满足 $\exp_p\tilde{\alpha}(t)=\alpha(t)\in U\cup\partial U$ 的每一个 $\tilde{\alpha}(t)$,设 γ_t 是以 $\tilde{\alpha}(t)$ 为起点的 $l(\alpha(t))$ 的提升,因为 $\exp_p$ 是局部等距,故 γ_t 在 $T_p(M)$ 中也是直线.

现在我们只要证明:当 $\alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$, $t_1,t_2\in[0,1]$ 时,直线 γ_{t_1} 和 γ_{t_2} 平行. 事实上,若 $m\in\gamma_{t_1}\cap\gamma_{t_2}$,则

$$\exp_p(m)\in l(\alpha(t_1))\cap l(\alpha(t_2)).$$

根据前面的证明,这是不可能的.

现在对 $\alpha(t)\in \mathrm{int}V$ 定义直线 $l(\alpha(t))$. 为此,利用指数映射,设 $\exp_p\tilde{\alpha}(t)=\alpha(t)\in \mathrm{int}V$,过 $\tilde{\alpha}(t)$ 在 $T_p(M)$ 中引平行公共方向的直线 γ(如上面所述). 显然,$\exp_p(\gamma)\subset \mathrm{int}V$,并且因为 $\exp_p(\gamma)$ 是测地线,故 $\exp_p(\gamma)$ 是 M 上的整条直线. 这样,对每个 $t\in[0,1]$,就定义了直线 $l(\alpha(t))$.

以下我们要证明:对于 $t\in[0,1]$, $l(\alpha(t))$ 是平行直线. 事实上,闭区间[0,1]可用有限个开区间 $I_1,\cdots,I_n$ 来覆盖,使得 $\tilde{\alpha}(I_i)$ 位于 $\tilde{\alpha}(t_i)(t_i\in I_i)$ 的一个邻域 W_i 中,并且 $\exp_p$ 在 W_i 上的限制是 W_i 中的一个等距映射. 于是,当 $t_1,t_2\in I_i$ 而 $\alpha(t_1)\neq\alpha(t_2)$ 时,$l(\alpha(t_1))$

平行于$l(\alpha(t_2))$. 事实上，因为γ_{t_1}平行于γ_{t_2}，$\exp_p$是W_i中的等距映射，故开线段$\exp_p(\gamma_{t_1}\cap W_i)$平行于$\exp_p(\gamma_{t_2}\cap W_i)$，这表明直线$\exp_p(\gamma_{t_1})=l(\alpha(t_1))$与$\exp_p(\gamma_{t_2})=l(\alpha(t_2))$有一段平行的线段，因而它们彼此平行. 由于[0,1]可分解为有限个区间$I_1,\cdots,I_n$，故以此类推. 可见这些直线$l(\alpha(t))$都互相平行.

特别地，直线$l(q)$平行于$l(p)$. 如果r是$U\cup\partial U$的另一点，则同理可证$l(r)$平行于$l(p)$，从而平行于$l(q)$. 这样，我们就完全证明了过$U\cup\partial U$中点的直线都相互平行. 定理证毕.

注　这个定理最早是 P. Hartman 和 L. Nirenberg（见 Amer. J. Math.，1959，81：901～920）作为一个定理的推论而得到的. 后来，W. S. Massey（见Tôhoku Math. J.，1962，14：73～79）和 J. J. Stoker（见Comn. Pure Appl. Math.，1961，14：627～635）分别用初等方法作出了直接证明. 这里的叙述主要根据文献[3] §5-8.

习　题

1. 详细验证公式(8.4)和(8.5).

2. 在旋转环面上是否存在由抛物点组成的渐近线？如果有，它是怎样的曲线？（这说明引理8.2中条件$K\equiv0$是必要的.）

§9　极小曲面的 Bernstein 定理

上面几节我们讨论了$\mathbf{E}^3$中常 Gauss 曲率曲面的某些整体性质. 现在来考虑平均曲率恒为零的曲面，即极小曲面. 如所知，$\mathbf{E}^3$中不存在紧致（闭）的极小曲面（见不等式(5.9)）. 对于完备的极小曲面，有下列著名的 Bernstein 定理.

定理(F. Bernstein，1915)　三维欧氏空间中完备的极小图必是平面.

这里所谓图(graph),就是指非参数化的曲面. 具体地说,设 $O - E_1E_2E_3$ 是 $\mathbf{E}^3$ 中某个固定的直角坐标系,坐标函数为 (u^1, u^2, z),则由方程

$$z = f(u^1, u^2) \tag{9.1}$$

定义的曲面称为 $\mathbf{E}^3$ 中的图,用向量来表示,则有

$$x = u^1E_1 + u^2E_2 + f(u^1, u^2)E_3 = (u^1, u^2, f(u^1, u^2)), \tag{9.2}$$

其中 x 表示图上点的位置向量. 完备的图是指(9.1) 中函数 $f(u^1, u^2)$ 在整个参数(u^1, u^2) 平面 R^2 上有定义.

9.1 共变微分和 Laplacian $\triangle$

设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面,x 表示 M 上点的位置向量. 在 $\mathbf{E}^3$ 中局部地选取幺正标架场$\{x; e_1, e_2, e_3\}$,使 e_3 是 M 在点 x 的单位法向量. 由第一章 §3 的讨论,我们有

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \omega^\alpha e_\alpha, \quad \omega^3 = 0, \\ \mathrm{d}e_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta + \omega_\alpha^3 e_3 \quad (1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant 2), \\ \mathrm{d}e_3 = \omega_3^\alpha e_\alpha, \end{cases} \tag{9.3}$$

其中

$$\omega_\alpha^3 = b_{\alpha\beta}\omega^\beta, \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}. \tag{9.4}$$

曲面的第一与第二基本形式,Gauss 曲率,平均曲率分别为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{I} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \tag{9.5}$$

$$\mathrm{II} = b_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta, \tag{9.6}$$

$$K = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2, \tag{9.7}$$

$$H = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}). \tag{9.8}$$

由此容易验证

$$\begin{cases} \sum_\gamma b_{\alpha\gamma}b_{\beta\gamma} = 2Hb_{\alpha\beta} - K\delta_{\alpha\beta}, \\ \sum_{\alpha,\beta}(b_{\alpha\beta})^2 = 4H^2 - 2K. \end{cases} \tag{9.9}$$

对(9.4)两边外微分，利用结构方程，可得

$$\sum_{\beta}(\mathrm{d}b_{\alpha\beta}-b_{\alpha\gamma}\omega_{\beta}^{\gamma}-b_{\gamma\beta}\omega_{\alpha}^{\gamma})\wedge\omega^{\beta}=0. \tag{9.10}$$

应用 Cartan 引理，可见

$$\mathrm{D}b_{\alpha\beta}\equiv\mathrm{d}b_{\alpha\beta}-b_{\alpha\gamma}\omega_{\beta}^{\gamma}-b_{\gamma\beta}\omega_{\alpha}^{\gamma}=b_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}, \tag{9.11}$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\gamma\beta}. \tag{9.12}$$

(9.12)就是曲面的 Codazzi 方程，$\mathrm{D}b_{\alpha\beta}$ 称为 $b_{\alpha\beta}$ 的**共变微分**.

现设 $F: M\rightarrow\mathbf{R}$ 是曲面 M 上的可微函数，定义

$$\mathrm{d}F=F_{\alpha}\omega^{\alpha}. \tag{9.13}$$

对上式两边外微分，利用结构方程，有

$$(\mathrm{d}F_{\alpha}-F_{\beta}\omega_{\alpha}^{\beta})\wedge\omega^{\alpha}=0. \tag{9.14}$$

由 Cartan 引理

$$\mathrm{D}F_{\alpha}\equiv\mathrm{d}F_{\alpha}-F_{\beta}\omega_{\alpha}^{\beta}=F_{\alpha\beta}\omega^{\beta}, \tag{9.15}$$

$$F_{\alpha\beta}=F_{\beta\alpha}.$$

$\mathrm{D}F_{\alpha}$ 称为 F_{α} 的共变微分.

函数 F 关于 M 的度量 $\mathrm{d}s^2$ 的 Laplacian $\triangle$ 定义为

$$\triangle F=\sum_{\alpha}F_{\alpha\alpha}=F_{11}+F_{22}. \tag{9.16}$$

例 1 设 M 是平面，取 $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2$，则可取

$$\omega^1=\mathrm{d}u,\quad \omega^2=\mathrm{d}v.$$

由结构方程 $\mathrm{d}\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\alpha}$，可见 $\omega_1^2=0$. 因此

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial F}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial F}{\partial u}\omega^1+\frac{\partial F}{\partial v}\omega^2,$$

故

$$F_1=\frac{\partial F}{\partial u},\quad F_2=\frac{\partial F}{\partial v}.$$

由共变微分的定义

$$\mathrm{D}F_1=F_{1\beta}\omega^{\beta}=\mathrm{d}F_1-F_2\omega_1^2$$

$$= \mathrm{d}F_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\omega^1 + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\omega^2.$$

可见 $F_{11} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$,同理 $F_{22} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$. 所以,

$$\triangle F = F_{11} + F_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)F.$$

这就是通常 $\mathbf{E}^2$ 上的 Laplace 算子.

例 2 设 $\varphi(F)$ 是复合函数,则

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi'(F)\mathrm{d}F = \varphi'(F)(F_1\omega^1 + F_2\omega^2).$$

因此,

$$\varphi_1 = \varphi'(F)F_1, \quad \varphi_2 = \varphi'(F)F_2.$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta}\omega^\beta &= \mathrm{d}\varphi_\alpha - \varphi_\beta\omega_\alpha^\beta \\ &= \mathrm{d}(\varphi'(F)F_\alpha) - \varphi'(F)F_\beta\omega_\alpha^\beta \\ &= (\varphi''\mathrm{d}F)F_\alpha + \varphi'(\mathrm{d}F_\alpha - F_\beta\omega_\alpha^\beta) \\ &= (\varphi''F_\alpha F_\beta + \varphi'F_{\alpha\beta})\omega^\beta.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\triangle\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{22} &= \varphi''(F_1^2 + F_2^2) + \varphi'\triangle F \\ &= \varphi'\triangle F + \varphi''|\mathrm{grad}\ F|^2. \qquad (9.17)\end{aligned}$$

这里 grad F 表示函数 F 的梯度.

例 3 设 $\triangle$ 是关于度量 $\mathrm{d}s^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ 的 Laplacian. 考虑共形度量 $\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \lambda^2\mathrm{d}s^2 = (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2$,其中 λ 是曲面上的正可微函数. 显然,

$$\tilde{\omega}^\alpha = \lambda\omega^\alpha.$$

设 $\tilde{\triangle}$ 表示关于度量 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 的 Laplacian. 我们要导出算子 $\tilde{\triangle}$ 与 $\triangle$ 之间的关系.

考虑可微函数 F. 由

$$\mathrm{d}F = F_\alpha\omega^\alpha = \tilde{F}_\alpha\tilde{\omega}^\alpha,$$

可见

$$\widetilde{F}_{\alpha}=\frac{1}{\lambda}F_{\alpha}.$$

设

$$\mathrm{d}\lambda=\tilde{\lambda}_{\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha},\quad \omega_1^2=p\omega^1+q\omega^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widetilde{\omega}^1&=\mathrm{d}\lambda\wedge\omega^1+\lambda\omega^2\wedge\omega_2^1=\tilde{\lambda}_2\widetilde{\omega}^2\wedge\omega^1-\lambda p\omega^2\wedge\omega^1\\&=-\frac{1}{\lambda}\tilde{\lambda}_2\widetilde{\omega}^1\wedge\widetilde{\omega}^2+\frac{1}{\lambda}p\widetilde{\omega}^1\wedge\widetilde{\omega}^2=\frac{1}{\lambda}(p-\tilde{\lambda}_2)\widetilde{\omega}^1\wedge\widetilde{\omega}^2.\\\mathrm{d}\widetilde{\omega}^2&=\mathrm{d}\lambda\wedge\omega^2+\lambda\omega^1\wedge\omega_1^2=\frac{1}{\lambda}(q+\tilde{\lambda}_1)\widetilde{\omega}^1\wedge\widetilde{\omega}^2.\end{aligned}$$

根据第一章公式(3.22),可见

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_1^2&=\frac{1}{\lambda}(p-\tilde{\lambda}_2)\widetilde{\omega}^1+\frac{1}{\lambda}(q+\tilde{\lambda}_1)\widetilde{\omega}^2\\&=\omega_1^2-\frac{1}{\lambda}\tilde{\lambda}_2\widetilde{\omega}^1+\frac{1}{\lambda}\tilde{\lambda}_1\widetilde{\omega}^2.\end{aligned}$$

由此可算得

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_{1\alpha}\widetilde{\omega}^{\alpha}&=\mathrm{d}\widetilde{F}_1-\widetilde{F}_2\widetilde{\omega}_1^2\\&=\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}F_1-\frac{1}{\lambda^2}F_1\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{\lambda}F_2\left(\omega_1^2-\frac{1}{\lambda}\tilde{\lambda}_2\widetilde{\omega}^1+\frac{1}{\lambda}\tilde{\lambda}_1\widetilde{\omega}^2\right)\\&=\frac{1}{\lambda}(\mathrm{d}F_1-F_2\omega_1^2)-\frac{1}{\lambda^2}F_1(\tilde{\lambda}_1\widetilde{\omega}^1+\tilde{\lambda}_2\widetilde{\omega}^2)\ \frac{1}{\lambda^2}F_2\tilde{\lambda}_2\widetilde{\omega}^1\\&\quad-\frac{1}{\lambda^2}F_2\tilde{\lambda}_1\widetilde{\omega}^2\\&=\frac{1}{\lambda^2}(F_{11}-F_1\tilde{\lambda}_1+F_2\tilde{\lambda}_2)\widetilde{\omega}^1+(\cdots)\widetilde{\omega}^2,\end{aligned}$$

即

$$\widetilde{F}_{11}=\frac{1}{\lambda^2}(F_{11}-F_1\tilde{\lambda}_1+F_2\tilde{\lambda}_2).$$

同理

$$\widetilde{F}_{22}=\frac{1}{\lambda^2}(F_{22}+F_1\tilde{\lambda}_1-F_2\tilde{\lambda}_2).$$

所以

$$\widetilde{\triangle}F=\sum_{\alpha}\widetilde{F}_{\alpha\alpha}=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{\alpha}F_{\alpha\alpha}=\frac{1}{\lambda^2}\triangle F,$$

即

$$\widetilde{\triangle}=\frac{1}{\lambda^2}\triangle. \tag{9.18}$$

9.2 关于 Gauss 曲率的计算

设曲面 M 上取局部等温坐标网，从而

$$\mathrm{d}s^2=\lambda^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2).$$

命题 9.1 在等温坐标网下曲面的 Gauss 曲率 K 为

$$K=-\triangle\log\lambda, \tag{9.19}$$

其中 $\triangle$ 是关于度量 $\mathrm{d}s^2=\lambda^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$ 的 Laplacian.

证明 取 $\omega^1=\lambda\mathrm{d}u,\omega^2=\lambda\mathrm{d}v$，则

$$\omega_1^2=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\omega^1+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\omega^2,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1^2&=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\right)\wedge\omega^1+\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\right)\wedge\omega^2\\&\quad-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\omega^2\wedge\omega_2^1+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\omega^1\wedge\omega_1^2\\&=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\right)\frac{1}{\lambda}\omega^1\wedge\omega^2+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\right)\frac{1}{\lambda}\omega^1\wedge\omega^2\\&\quad-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\omega_1^2\wedge\omega^2+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\omega^1\wedge\omega_1^2\\&=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial v^2}\right)\omega^1\wedge\omega^2.\end{aligned}$$

又由第一章 §3 的(3.31)，有

$$\mathrm{d}\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2.$$

于是

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial v^2}\right)=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda$$

$$= - \triangle \log \lambda,$$

其中 $\triangle$ 是关于度量 $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$ 的 Laplacian. 证毕.

9.3 极小图的 Gauss 曲率计算

设 M 是由(9.1)式定义的图,从(9.2)式,M 的单位法向量为

$$n = \frac{x_{u^1} \times x_{u^2}}{|x_{u^1} \times x_{u^2}|} = -\frac{1}{W}(f_{u^1}E_1 + f_{u^2}E_2 - E_3), \tag{9.20}$$

其中

$$W = \sqrt{f_{u^1}^2 + f_{u^2}^2 + 1} \geqslant 1. \tag{9.21}$$

取 $e_3 = n$, e_1, e_2 为曲面上的两互相垂直的单位切向量场,ω^1, ω^2 为它们的对偶场. 令

$$p_\alpha = E_3 \cdot e_\alpha \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant 2), \quad F = E_3 \cdot e_3 = \frac{1}{W}, \tag{9.22}$$

则

$$\begin{aligned} dp_\alpha &= E_3 \cdot (de_\alpha) = E_3 \cdot (\omega_\alpha^\beta e_\beta + \omega_\alpha^3 e_3) \\ &= \omega_\alpha^\beta p_\beta + b_{\alpha\beta}\omega^\beta F, \\ dF &= E_3 \cdot (de_3) = E_3 \cdot (\omega_3^\alpha e_\alpha) \\ &= -\sum_\alpha b_{\alpha\beta}\omega^\beta p_\alpha = -\sum_\beta b_{\alpha\beta}\omega^\alpha p_\beta. \end{aligned}$$

因此

$$F_\alpha = -\sum_\beta b_{\alpha\beta} p_\beta, \tag{9.23}$$

$$\begin{aligned} DF_\alpha &= dF_\alpha - F_\beta \omega_\alpha^\beta \\ &= -d(\sum_\beta b_{\alpha\beta} p_\beta) + (\sum_\gamma b_{\beta\gamma} p_\gamma)\omega_\alpha^\beta \\ &= -\sum_\beta p_\beta db_{\alpha\beta} - \sum_\beta b_{\alpha\beta} dp_\beta + \left(\sum_\beta b_{\beta\gamma} p_\beta\right)\omega_\alpha^\gamma \\ &= -\sum_\beta p_\beta (db_{\alpha\beta} - b_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - b_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma) - F\sum_\gamma b_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}\omega^\beta \\ &= -(\sum_\beta b_{\alpha\beta\gamma} p_\beta + F\sum_\beta b_{\alpha\beta} b_{\beta\gamma})\omega^\gamma. \end{aligned}$$

所以

$$\triangle F = \sum_{\alpha} F_{\alpha\alpha} = -\sum_{\alpha,\beta} b_{\beta\alpha\alpha} p_{\beta} - F\sum_{\alpha,\beta}(b_{\alpha\beta})^2.$$

若 M 为极小曲面，即 $2H = b_{11} + b_{22} = 0$，则由(9.12)可见

$$\sum_{\alpha} b_{\beta\alpha\alpha} = \sum_{\alpha} b_{\alpha\alpha\beta} = 0.$$

又由(9.9)，得

$$\sum_{\alpha,\beta}(b_{\alpha\beta})^2 = -2K.$$

因此

$$\triangle F = 2KF. \tag{9.24}$$

另一方面，由(9.23)，(9.9)，注意到 $H = 0$，得

$$|\mathrm{grad} F|^2 = \sum_{\alpha}(F_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} b_{\alpha\beta} b_{\alpha\gamma} p_{\gamma} p_{\beta}$$
$$= -K\sum_{\beta}(p_{\beta})^2.$$

又因为 $p_1 = E_3 \cdot e_1$，$p_2 = E_3 \cdot e_2$，$F = E_3 \cdot e_3$，e_1, e_2, e_3 为互相垂直的单位向量，E_3 的长度为 1，故

$$p_1^2 + p_2^2 + F^2 = 1, \text{ 即 } \sum_{\beta}(p_{\beta})^2 = 1 - F^2.$$

所以

$$|\mathrm{grad}\ F|^2 = -K(1 - F^2). \tag{9.25}$$

考虑函数 $\varphi(F) = \log(1 + F)$，利用(9.24)、(9.25)，从(9.18)可得

$$\triangle\log(1 + F) = \frac{1}{1+F}\triangle F - \frac{1}{(1+F)^2}|\mathrm{grad} F|^2 = K,$$

即

$$K = \triangle\log\left(1 + \frac{1}{W}\right). \tag{9.26}$$

这就是 $\mathbf{E}^3$ 中极小图的 Guass 曲率的计算公式.

9.4 Bernstein 定理的证明

设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中完备的极小图. 在 M 上导入局部等温参数(u,

v)，使 M 的第一基本形式为

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$

对于由(9.21)确定的函数 W，在 M 上构造共形度量 $d\tilde{s}^2$：

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 + \frac{1}{W}\right)^2 ds^2 = \left[\left(1 + \frac{1}{W}\right)\lambda\right]^2 (du^2 + dv^2). \quad (9.27)$$

因为 $1 \leqslant 1 + \frac{1}{W} \leqslant 2$，故

$$ds^2 \leqslant d\tilde{s}^2 \leqslant 4ds^2.$$

由于在 M 上度量 ds^2 和 $4ds^2$ 都是完备的，因此上式表明度量 $d\tilde{s}^2$ 也是完备的. 利用(9.19)，对于度量 ds^2，它的 Gauss 曲率

$$K = - \triangle \log\lambda.$$

用 $\widetilde{K}$ 表示对于度量 $d\tilde{s}^2$ 的 Gauss 曲率，则利用(9.27)，有

$$\begin{aligned}
\widetilde{K} &= - \widetilde{\triangle}\log\left[\left(1 + \frac{1}{W}\right)\lambda\right] \\
&= - \left(1 + \frac{1}{W}\right)^{-2} \triangle\log\left[\left(1 + \frac{1}{W}\right)\lambda\right] \\
&= - \left(1 + \frac{1}{W}\right)^{-2} \left[\triangle\log\left(1 + \frac{1}{W}\right) + \triangle\log\lambda\right] \\
&= - \left(1 + \frac{1}{W}\right)^{-2} (K - K) = 0.
\end{aligned}$$

上面的等式应用了公式(9.19)及(9.26). 这样，$d\tilde{s}^2$ 是平坦度量，即它可与平面欧氏度量等距. 因此，存在参数(ξ, η) 使

$$d\tilde{s}^2 = (d\xi)^2 + (d\eta)^2,$$

其中(ξ, η) 定义在整个平面 R^2 上.

另一方面，由于极小曲面度量 ds^2 的 Gauss 曲率 $K \leqslant 0$，因此，利用(9.17)、(9.19)、(9.26)，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\triangle}\log\left(1 + \frac{1}{W}\right) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{W}\right) \\
&= \lambda^2\left[\lambda^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{W}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \lambda^2 \triangle \log\left(1 + \frac{1}{W}\right) = \lambda^2 K \leqslant 0.$$

这表明在整个(ξ,η)平面上，函数$\log\left(1+\frac{1}{W}\right)$是上调和函数. 同时，显然$\log\left(1+\frac{1}{W}\right) > 0$，于是它是有下界的上调和函数. 根据Liouvill定理①，$\log\left(1+\frac{1}{W}\right) = \text{const.}$，于是

$$0 = \lambda^2 K \leqslant 0, \quad \text{即} \quad K = 0.$$

这样ds^2也是平坦的. 由极小性，M上没有抛物点. 所以M是平面（参考§8）. 定理证毕.

注 极小曲面的Bernstein定理有好几种证法，这里的证法属于陈省身（见L'Ens. Math.，1969，15：53～61）. 注意到作为极小图的极小曲面总是稳定的（即面积泛函的二阶变分非负），因此作为Bernstein定理的一种推广，自然要问：在$\mathbf{E}^3$中完备稳定的极小曲面是否必是平面？回答是肯定的. 这已被Fisher-Colbrie与R. Schoen以及M. do Carmo与彭家贵分别独立地给予证明. Bernstein定理还有许多别的推广，有兴趣的读者可参考下列文献：R. Osserman. A Survey of Minimal Surfaces. New York：Dover Pub，Inc.，1986.

习 题

1. 设M是$\mathbf{E}^3$中的极小曲面，x是它的位置向量，试计算$\triangle x$，这里$\triangle$表示M上诱导度量的Laplacian.

2. 证明$\mathbf{E}^3$中不存在紧致的闭极小曲面.

3. 设M是$\mathbf{E}^3$中的极小曲面，它的诱导度量为ds^2，Gauss曲率为$K(<0)$，证明：共形度量$d\tilde{s}^2 = -K ds^2$的Gauss曲率$\tilde{K} = 1$.

---

① D. 吉耳巴格和N. S. 塔丁格. 二阶椭圆型偏微分方程（中译本）. 上海科学技术出版社，1981，p. 30，习题2.14

§ 10　常平均曲率曲面

10.1　面积的变分

设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的紧致连通曲面，具有边界曲线 ∂M（∂M 可能是空集）. M 的一个**变分**是指一族以 t 为参数的连续可微的单参数曲面族 $\{M_t\}$，$-\varepsilon < t < \varepsilon$，使得 $M_0 = M$，$\partial M_t = \partial M$（即边界曲线保持不变）.

设 M_t 的位置向量为

$$x = x(u^1, u^2, t),$$

其中 t 为参数. 在 $\mathbf{E}^3$ 中选取局部幺正标架 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$，使得 $e_3(t)$ 是 M_t 的单位法向量场. 于是，对于固定的某个 t，M_t 的运动方程是

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \omega^\alpha e_\alpha & (1 \leqslant \alpha \leqslant 2), \\ \mathrm{d}e_i = \omega_i^j e_j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 & (1 \leqslant i, j \leqslant 3). \end{cases} \tag{10.1}$$

这里 ω^α 和 ω_i^j 一般是含有参数 t 的 1 形式.

下面，我们在字母上面加点"·"表示关于 t 的偏导数，并且令

$$\begin{cases} \dot{x} = a^i e_i, \\ \dot{e}_i = a_i^j e_j, \quad a_i^j + a_j^i = 0, \end{cases} \tag{10.2}$$

其中 a^i 和 a_i^j 是包含 t 的函数.

将(10.1)的第一式关于 t 求偏导数，利用(10.2)得

$$\mathrm{d}\dot{x} = (\dot{\omega}^1 + a_2^1\omega^2)e_1 + (\dot{\omega}^2 + a_1^2\omega^1)e_2 + (a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2)e_3. \tag{10.3}$$

另一方面，对(10.2)的第一式两边外微分，得

$$\mathrm{d}\dot{x} = (\mathrm{d}a^i + a^j\omega_j^i)e_i. \tag{10.4}$$

利用求导的可交换性，比较(10.3)和(10.4)，便可得到

$$
\begin{cases}
\dot{\omega}^1 + a_2^1\omega^2 = \mathrm{d}a^1 + a^2\omega_2^1 + a^3\omega_3^1, \\
\dot{\omega}^2 + a_1^2\omega^1 = \mathrm{d}a^2 + a^1\omega_1^2 + a^3\omega_3^2, \\
a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2 = \mathrm{d}a^3 + a^1\omega_1^3 + a^2\omega_2^3.
\end{cases}
\tag{10.5}
$$

M_t 的面积元是

$$
\mathrm{d}A_t = \omega^1 \wedge \omega^2.
$$

利用(10.5)的前两式,易得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\dot{A}_t &= \dot{\omega}^1 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \dot{\omega}^2 \\
&= (\mathrm{d}a^1 + a^2\omega_2^1 + a^3\omega_3^1) \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge (\mathrm{d}a^2 + a^1\omega_1^2 + a^3\omega_3^2) \\
&= \mathrm{d}(a^1\omega^2 - a^2\omega^1) - a^3(\omega_1^3 \wedge \omega^2 - \omega_2^3 \wedge \omega^1) \\
&= \mathrm{d}(a^1\omega^2 - a^2\omega^1) - 2a^3H\mathrm{d}A_t,
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

其中 $H = \dfrac{1}{2}(b_{11} + b_{22})$ 是曲面的平均曲率.

对(10.6)的两边积分,应用 Stokes 定理,便得面积的**第一变分**:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}(0) &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}\mathrm{d}A_t\right]_{t=0} = \left[\int_{M_t}\mathrm{d}\dot{A}_t\right]_{t=0} \\
&= \int_{\partial M}(a^1\omega^2 - a^2\omega^1)_{t=0} - 2\int_M (a^3H)_{t=0}\mathrm{d}A.
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

因为对一切 t,$\partial M_t = \partial M$,故限制在边界曲线上时,$\dot{x}|_{\partial M} = 0$. 由(10.2)即有

$$
a^1|_{\partial M} = a^2|_{\partial M} = 0,
$$

故(10.7)可化为

$$
\dot{A}(0) = -2\int_M (a^3)_{t=0}H\mathrm{d}A,
\tag{10.8}
$$

其中 H 是 M 的平均曲率. 因此,即得下列命题.

命题 10.1 对任何面积变分,M 的面积达到逗留值的充要条件是 $H = 0$,即 M 为极小曲面.

10.2 保体积的变分

设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面. 因为 $\mathbf{E}^3$ 中不存在紧致的闭极小曲面,故对于 10.1 中所述的面积变分,M 的面积不可能达到逗留值(命题 10.1). 现在我们从另一角度来考虑这个问题.

如所知,平面上的等周问题是求包围固定面积的最短闭曲线,答案是圆周. 在 $\mathbf{E}^3$ 中相类似的问题是求具有固定体积而其表面积为最小的闭曲面,这就是空间的等周问题,我们将证明,紧致闭曲面具有常平均曲率的充要条件是,它的面积对于保持体积的变分达到逗留值.

设 V 是 M 所包围的空间的体积,它可以由下式计算

$$V=-\frac{1}{3}\int_M(x\cdot n)\mathrm{d}A, \tag{10.9}$$

其中 x 是 M 的位置向量,n 是 M 的单位内法向量.

公式(10.9)可以从图 Ⅲ-15 导出,$-(x\cdot n)$ 是具有底面积 $\mathrm{d}A$ 的锥体的高,故 $-(x\cdot n)\mathrm{d}A$ 是锥体体积的三倍,因而 $3V=-\int_M(x\cdot n)\mathrm{d}A$. 对于一个非凸域,图中的右图指出了可通过计算锥体体积之差的办法来解决.

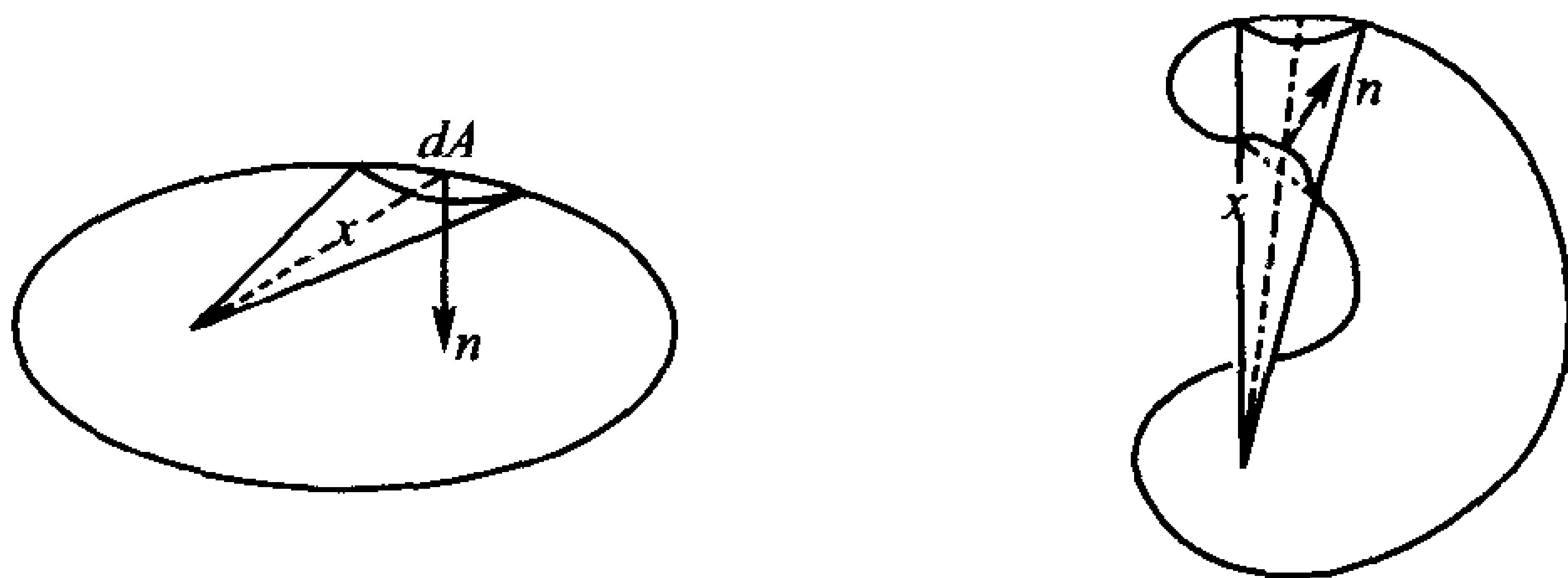


图 Ⅲ-15

现设$\{M_t\}$，$-\varepsilon < t < \varepsilon$，是$M$的单参数变分的闭曲面族，使得$M_0 = M$. 如同10.1一样，选取局部幺正标架场，从而得(10.1)～(10.6)诸式. 根据公式(10.9)，曲面M_t所包围的空间体积V_t是

$$V_t = -\frac{1}{3}\int_{M_t}(x \cdot e_3)\mathrm{d}A_t. \tag{10.10}$$

令

$$p_i = x \cdot e_i, \tag{10.11}$$

对(10.10)两边关于t求偏导数，利用(10.2)和(10.11)，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_t &= -\frac{1}{3}\int_{M_t}(\dot{x} \cdot e_3 + x \cdot \dot{e}_3)\mathrm{d}A_t - \frac{1}{3}\int_{M_t} p_3 d\dot{A}_t \\ &= -\frac{1}{3}\int_{M_t} a^3 \mathrm{d}A_t - \frac{1}{3}\int_{M_t}(p_1 a_3^1 + p_2 a_3^2)\mathrm{d}A_t - \frac{1}{3}\int_{M_t} p_3 \mathrm{d}\dot{A}_t.\end{aligned} \tag{10.12}$$

另一方面，由(10.1)、(10.2)和(10.3)，直接计算有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\dot{x}, x, \mathrm{d}x) &= (\mathrm{d}\dot{x}, x, \mathrm{d}x) + (\dot{x}, \mathrm{d}x, \mathrm{d}x) \\ &= p_3\dot{\omega}^2 \wedge \omega^1 - p_3\dot{\omega}^1 \wedge \omega^2 - p_2 a_2^3 \omega^2 \wedge \omega^1 \\ &\quad + p_1 a_1^3 \omega^1 \wedge \omega^2 + 2a^3 \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -p_3 d\dot{A}_t - (p^1 a_3^1 + p^2 a_3^2)\mathrm{d}A_t + 2a^3 \mathrm{d}A_t,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{3}(p_1 a_3^1 + p_2 a_3^2)\mathrm{d}A_t - \frac{1}{3}p_3 \mathrm{d}\dot{A}_t \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(\dot{x}, x, \mathrm{d}x) - \frac{2}{3}a^3 \mathrm{d}A_t.\end{aligned} \tag{10.13}$$

将(10.13)代入(10.12)，应用Stokes定理，得

$$\dot{V}_t = -\int_{M_t} a^3 \mathrm{d}A_t.$$

若令

$$f = (a^3)_{t=0} \tag{10.14}$$

表示变分的法向分量，则得体积V的变分公式：

$$\dot{V}(0) = \dot{V}_t|_{t=0} = -\int_M f\mathrm{d}A. \qquad (10.15)$$

若 $V_t = V_0 = V$，则称 $\{M_t\}$ 是 M 的一个保体积的变分. 对于保体积的变分，显然 $\dot{V}(0) = 0$.

定理 10.2 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面，则 M 具有常平均曲率 H 的充要条件是 M 的面积 A 关于保体积的变分达到逗留值.

证明 利用(10.14)、(10.8) 化为

$$\dot{A}(0) = -2\int_M fH\mathrm{d}A. \qquad (10.16)$$

定理的必要性是简单的，因为若 $H = \text{const.}$，而且变分是保体积的，则

$$\dot{V}(0) = -\int_M f\mathrm{d}A = 0,$$

从而

$$\dot{A}(0) = -2\int_M fH\mathrm{d}A = -2H\int_M f\mathrm{d}A = 0.$$

下证充分性. 设对 M 的任何保体积的变分，$\dot{A}(0) = 0$，我们要证明 $H = \text{const.}$.

设 f 是 M 上使 $\int_M f\mathrm{d}A = 0$ 的任意函数. 我们首先要证明，f 确是某个保体积的变分的法向分量. 事实上，考虑单参数 t 的曲面族

$$\tilde{x}_t = x + tfe_3,$$

用 $\tilde{V}_t$ 表示 $\tilde{x}_t$ 的体积，$\tilde{x}_0$ 的体积 $\tilde{V}_0 = x$ 的体积 V，变分 $\{\tilde{x}_t\}$ 的法向分量显然是

$$(\dot{\tilde{x}}_t \cdot e_3)\Big|_{t=0} = fe_3 \cdot e_3 = f,$$

再根据(10.15) 和对 f 的假设

$$\dot{\tilde{V}}(0) = \dot{\tilde{V}}_t\Big|_{t=0} = -\int_M f\mathrm{d}A = 0.$$

但这并不能保证变分$\{\tilde{x}_t\}$保持体积. 为此,我们取变分曲面族

$$x_t = \frac{V}{\tilde{V}_t}\tilde{x}_t, \tag{10.17}$$

则按(10.9),x_t 的体积 $V_t = V$,即保持体积.

另一方面,由于$\dot{\tilde{V}}_t\Big|_{t=0} = 0$,故

$$(\dot{x}_t)_{t=0} = \left(\frac{V}{\tilde{V}_t}\dot{\tilde{x}}_t\right)_{t=0} = (\dot{\tilde{x}}_t)_{t=0}.$$

上式两边取与 e_3 的数积,得

$$(\dot{x}_t \cdot e_3)_{t=0} = (\dot{\tilde{x}}_t \cdot e_3)_{t=0} = f,$$

即 f 不仅是$(\dot{\tilde{x}}_t)_{t=0}$ 的法向分量,也是$(\dot{x}_t)_{t=0}$ 的法向分量. 因此,f 是保体积变分(10.17)的法向分量.

由充分性假设,M 的面积 A 达到逗留值,故

$$\dot{A}(0) = -2\int_M fH\mathrm{d}A = 0.$$

又若 C 是任意常数,则

$$\int_M fC\mathrm{d}A = 0.$$

因此,对任意使$\int_M f\mathrm{d}A = 0$ 的函数 f 和任意常数 C,

$$\int_M f(H - C)\mathrm{d}A = 0. \tag{10.18}$$

令

$$h = \frac{1}{A}\int_M H\mathrm{d}A,$$

则$\int_M (H - h)\mathrm{d}A = 0$;因而可在(10.18)中取 $f = H - h$, $C = h$,便得

$$\int_M (H-h)^2 \mathrm{d}A = 0.$$

于是，$H = h = \text{const}$. 证毕.

10.3 Hopf 定理

如所知，球面 S^2 是 $\mathbf{E}^3$ 中平均曲率为常数的紧致闭曲面，因而由定理 10.2，它的面积关于保体积的变分达到逗留值. 可以证明，球面是 $\mathbf{E}^3$ 中具有固定体积而表面积为最小的闭曲面，即它是空间等周问题的解. 由定理 10.2 产生的一个自然问题是面积关于保体积的变分达到逗留值的曲面是否必为球面？即平均曲率为常数的紧致闭曲面是否必为球面？这就是著名的 Hopf 猜想，是 H. Hopf 在 50 年代提出的. 经过数学家们 30 多年的努力，终于发现 Hopf 猜想是不成立的. 但是，若对曲面加上一个拓扑条件，则上述问题的回答是肯定的. 这便是下列

定理 10.3(H. Hopf) 平均曲率为常数的拓扑球面(即亏格为零的紧致闭曲面)必是标准球面.

证明 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中平均曲率 H 为常数的拓扑球面，在 M 上选取局部等温坐标系 (u,v)，使 M 的第一基本形式化为

$$\mathrm{I} = \lambda^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2), \tag{10.19}$$

其中 $\lambda(>0)$ 是实函数. 引入局部复坐标

$$z = u + \sqrt{-1}\, v,$$

(10.19) 就化为

$$\mathrm{I} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = \varphi\bar{\varphi}, \tag{10.20}$$

其中 $\omega^1 = \lambda \mathrm{d}u, \omega^2 = \lambda \mathrm{d}v$，且

$$\varphi = \lambda \mathrm{d}z = \omega^1 + \sqrt{-1}\,\omega^2, \tag{10.21}$$

这里 φ 是复微分形式，$\bar{\varphi}$ 是它的复共轭.

对(10.21) 两边外微分，利用结构方程，易得

$$\mathrm{d}\varphi = -\sqrt{-1}\,\varphi \wedge \omega_2^1. \tag{10.22}$$

现设 M 的第二基本形式是

$$\mathrm{II} = b_{11}(\omega^1)^2 + 2b_{12}\omega^1\omega^2 + b_{22}(\omega^2)^2,$$

它的平均曲率

$$H = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}).$$

若令

$$a = \frac{1}{2}(b_{11} - b_{12}) - \sqrt{-1}\,b_{12}, \quad \Psi = a\,\varphi^2, \tag{10.23}$$

则

$$\mathrm{II} - H\,\mathrm{I} = \mathrm{Re}(\Psi), \tag{10.24}$$

即它是复二次微分形式的实部. 我们要证明 $\Psi = 0$,从而 $\mathrm{II} = H\,\mathrm{I}$,即 M 是全脐点的. 为此,我们只要证明 Ψ 是 M 上的全纯复二次微分形式,然后应用下面的事实:

引理 10.4 在拓扑球面上不存在非零的正次数复全纯微分形式.

上述引理可根据 Riemann 曲面理论中的 Riemann-Roch 定理直接推得. 这些内容超出了本书的范围,这里从略. 有兴趣的读者可参考吕以辇、张学莲编著的《黎曼曲面》,第 7 章 §5(科学出版社,1991).

现在我们来证明 Ψ 是全纯微分形式. 根据本章 §9 的(9.11)和(9.12),由于 H 为常数,便有

$$b_{11\alpha} + b_{22\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2). \tag{10.25}$$

而且容易验证

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}b_{11} &= -2b_{12}\omega_2^1 + b_{111}\omega^1 + b_{112}\omega^2, \\
\mathrm{d}b_{22} &= 2b_{12}\omega_2^1 - b_{111}\omega^1 - b_{112}\omega^2, \\
\mathrm{d}b_{12} &= (b_{11} - b_{22})\omega_2^1 + b_{112}\omega^1 - b_{111}\omega^2.
\end{aligned}$$

由此及(10.23),得

$$\mathrm{d}a = -\sqrt{-1}\,2a\omega_2^1 + (b_{111} - \sqrt{-1}\,b_{112})\varphi.$$

注意到(10.21)$\varphi = \lambda \mathrm{d}z$,故上式就是

$$\mathrm{d}a + \sqrt{-1}\,2a\omega_2^1 \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\mathrm{d}z). \tag{10.26}$$

另一方面,把 $\varphi = \lambda \mathrm{d}z$ 代入(10.22),注意到 λ 是实的,便有

$$\mathrm{d}\lambda - \sqrt{-1}\,\lambda\omega_2^1 \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\mathrm{d}z). \tag{10.27}$$

由(10.26) 和(10.27),可得

$$\mathrm{d}(a\lambda^2) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\mathrm{d}z), \tag{10.28}$$

即 $a\lambda^2$ 是 z 的全纯函数. 因此,二次微分形式 $\Psi = a\varphi^2 = (a\lambda^2)\mathrm{d}z^2$ 是全纯微分形式.

由于 M 是拓扑球面,根据引理 10.4,$\Psi = 0$. 再由(10.24),可见 M 是全脐点的,从而 M 必为普通的标准球面. 证毕.

注 上述的证明方法属于陈省身(见 Lect. Notes in Math., Springer, 1007: 104 ~ 108). 其推广可参考[7]. 在定理 10.3 中,亏格为零的假设是不能少的. 1985 年,H. C. Wente 构造出了 $\mathbf{E}^3$ 中平均曲率为常数的拓扑环面(亏格为 1),从而对 Hopf 猜想举出一个反例(参考 Pacific J. Math., 1986, 121: 193 ~ 242). 现在人们已能构造出具有任意亏格的常平均曲率的紧致闭曲面(参考 J. Diff. Geom., 1991, 33: 683 ~ 715).

定理 10.3 的一个直接推论是

推论 10.5 $\mathbf{E}^3$ 中具有非负 Gauss 曲率和常平均曲率的紧致闭曲面必是标准球面.

由(10.28) 可见,当 H 为常数时,$a\lambda^2$ 是全纯函数. 因此,在非脐点的区域($a \neq 0$) 中,我们可通过坐标的全纯变换,使得 $a\lambda^2 \equiv 1$;显然,这时坐标曲线是曲率线($b_{12} = 0$). 于是,有

$$a = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2}(b_{11} - b_{22}).$$

由此,

$$b_{11}^2 + b_{22}^2 = \frac{4}{\lambda^2} + 2b_{11}b_{22}.$$

注意到 Gauss 曲率 $K = b_{11}b_{22}$，我们有

$$H^2 = \frac{1}{4}(b_{11} + b_{22})^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\lambda^2} + 4b_{11}b_{22}\right) = \frac{1}{\lambda^4} + K,$$

$$K = H^2 - \frac{1}{\lambda^4}. \tag{10.29}$$

用 $\triangle$ 和 $\overline{\triangle}$ 分别表示关于度量 ds^2 和平坦度量 $du^2 + dv^2$ 的 Laplacian，则(见本章第 9 节)有

$$K = -\triangle\log\lambda = -\frac{1}{2\lambda^2}\overline{\triangle}\log\lambda^2.$$

不妨取 $H = \frac{1}{2}$，则(10.29)成为

$$-\frac{1}{2\lambda^2}\overline{\triangle}\log\lambda^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda^4}.$$

令 $\lambda^2 = 2e^{\phi}$，我们得

$$-\frac{1}{4}e^{-\phi}\overline{\triangle}\phi = \frac{1}{4}(1 - e^{-2\phi}),$$

即

$$-\overline{\triangle}\phi = e^{\phi} - e^{-\phi} = 2\sinh\phi,$$

或

$$\overline{\triangle}\phi + 2\sinh\phi = 0. \tag{10.30}$$

这样，构造常平均曲率曲面的问题可归结为求解微分方程(10.30)．解这种微分方程的一个方法是应用孤立子理论．读者可参考：谷超豪、胡和生、周子翔编写的《孤立子理论中的达布变换及其几何应用》，上海科学技术出版社，1999 年版．

习　　题

1．详细验证(10.13)．

2. 验证(10.24)和(10.28).

3. 详细证明推论 10.5.

4. 将一椭圆在其平面内的定直线上无滑动地滚动，试证：

(Ⅰ)椭圆焦点的曲率半径 ρ 和其被椭圆与定直线夹着的长度 δ 必满足关系式 $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\delta}=\text{const.}$；

(Ⅱ)将此轨迹曲线绕定直线回转而生成的旋转曲面必有常平均曲率.

第四章　曲面的内蕴几何学

本章讨论仅与曲面的第一基本形式有关的几何性质，即曲面的内蕴几何学. 在这种情况下，曲面完全可以脱离开外围欧氏空间而只要保留其上的诱导度量，这就是抽象曲面的概念. 由正定的二次微分形式所定义的度量称为 Riemann 度量. 抽象曲面就是赋予 Riemann 度量的二维拓扑流形. 所谓拓扑流形是指局部欧氏化的满足第二可数性公理的 Hausdorff 空间. 这样，本章的内容可适用于任何抽象曲面，即二维 Riemann 流形[6]. 为直观起见，我们的讨论常从 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面开始，然后归纳到抽象曲面上去. 事实上，$\mathbf{E}^3$ 中的曲面为抽象曲面提供了最好的实例和背景.

§1　曲面上的向量场

1.1　曲面上的向量场

曲面 $M: x = x(u,v)$ 上的**向量场**是指在 M 的每点 $x \in M$ 给定一个切向量 $W(x)$，即它位于 M 在 x 点的切平面之中. 一般地，它可表示为

$$W(x) = a(x)x_u + b(x)x_v = a(u,v)x_u + b(u,v)x_v,$$

其中 $x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}, x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}$.

向量场 $W(x)$ 的**积分曲线**(**轨线**) 定义为微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a(u,v), \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = b(u,v) \tag{1.1}$$

的解 $u=u(t), v=v(t)$. 由微分方程理论知道，对于 M 中一点 (u_0, v_0)，必存在一条积分曲线

$$u=\varphi(u_0,v_0,t),\quad v=\psi(u_0,v_0,t), \tag{1.2}$$

使得在 $t=0$ 时，$u=u_0, v=v_0$，即

$$\varphi(u_0,v_0,0)=u_0,\quad \psi(u_0,v_0,0)=v_0,$$

并且处处以 $W(x)$ 为解曲线的切向量.

例 1 $\mathbf{E}^3$ 中环面 T^2 可表示为

$$x=\left\{\left(a+b\cos\frac{s}{b}\right)\cos u,\left(a+b\cos\frac{s}{b}\right)\sin u, b\sin\frac{s}{b}\right\}$$

$$(0\leqslant s<2\pi b,\ 0\leqslant u<2\pi).$$

这里 s 是每一条经线上的弧长参数. 那么，T^2 上的向量场

$$W(u,s)=\left\{-\cos u\sin\frac{s}{b}, -\sin u\sin\frac{s}{b}, \cos\frac{s}{b}\right\}$$

是可微的单位向量场. 不难验证，其轨线就是 T^2 上的经线(留作习题).

例 2 把球面 S^2 去掉两极 N 和 S，每条从 N 到 S 的经线的切向量的全体构成定义在 $S^2\backslash(\{N\}\cup\{S\})$ 上的向量场 $V(x)$. 我们可以用同一参数 t, $-1<t<1$，将每一条从 N 到 S 的经线加以参数化，并在同一纬线上的点取相同的 t 值，然后定义

$$W(x)=(1-t^2)V(x),$$

当 $x\in S^2\backslash(\{N\}\cup\{S\})$；

$$W(N)=W(S)=0.$$

如图 Ⅳ-1 所示，向量场 W 是 S^2 上的向量场，它在两极 N 和 S 处成为零向量.

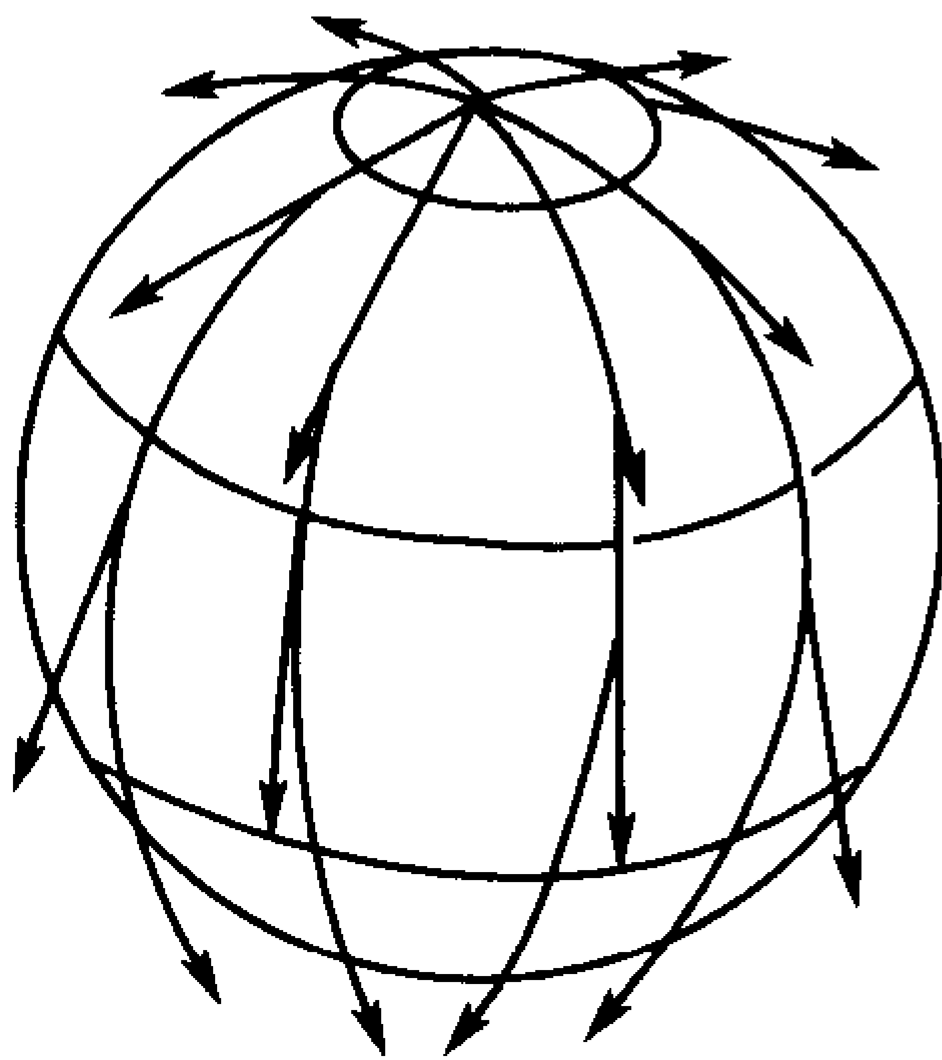


图 Ⅳ-1

1.2　曲面上向量场的平行移动

设 $\mathbf{E}^3$ 中曲面 M 的位置向量 $x = x(u^1, u^2)$，双参数幺正活动标架为 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$，其中 e_3 是 M 的单位法向量场. 考虑 M 上的一个可微向量场 $V(u^1, u^2)$，它的微分 $\mathrm{d}V$ 在 M 的切平面上的投影称为 V 的**绝对微分**，用 $\mathrm{D}V$ 表示之. $\mathrm{D}V$ 也是 M 上的向量场.

设 $V = v^\alpha e_\alpha (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2;\ i, j, k = 1, 2, 3)$，我们来计算 $\mathrm{D}V$.

因为

$$\mathrm{d}e_\alpha = \omega_\alpha^i e_i,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= (\mathrm{d}v^\alpha) e_\alpha + v^\alpha \mathrm{d}e_\alpha \\ &= (\mathrm{d}v^\alpha) e_\alpha + v^\alpha \omega_\alpha^\beta e_\beta + v^\alpha \omega_\alpha^3 e_3.\end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{D}V = (\mathrm{d}v^\alpha + v^\beta \omega_\beta^\alpha) e_\alpha = (\mathrm{D}v^\alpha) e_\alpha, \tag{1.3}$$

其中

$$\mathrm{D}v^\alpha = \mathrm{d}v^\alpha + v^\beta \omega_\beta^\alpha. \tag{1.4}$$

命题 1.1　设 V, W 是曲面上的可微向量场，f 是曲面上可微函数，则有

(Ⅰ) $\mathrm{D}(V + W) = \mathrm{D}V + \mathrm{D}W$;

(Ⅱ) $\mathrm{D}(fV) = (\mathrm{d}f)V + f\mathrm{D}V$;

(Ⅲ) $\mathrm{D}(V \cdot W) = (\mathrm{D}V) \cdot W + V \cdot (\mathrm{D}W)$.

证明　(Ⅰ)和(Ⅱ)是容易验证的. 考虑(Ⅲ)，由(1.4)

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}V) \cdot W + V \cdot (\mathrm{D}W) &= (\mathrm{D}v^\alpha e_\alpha)(w^\beta e_\beta) + (v^\alpha e_\alpha)(\mathrm{D}w^\beta e_\beta) \\ &= \sum_\alpha (\mathrm{d}v^\alpha + \omega_\beta^\alpha v^\beta) w^\alpha + \sum_\alpha v^\alpha (\mathrm{d}w^\alpha + \omega_\beta^\alpha w^\beta) \\ &= \sum_\alpha (w^\alpha dv^\alpha + v^\alpha \mathrm{d}w^\alpha) + \sum_{\alpha,\beta} (v^\beta w^\alpha + v^\alpha w^\beta) \omega_\beta^\alpha.\end{aligned}$$

因为 $\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0$，故上式最后第二个和式为零，因此得

$$(\mathrm{D}V)\cdot W+V\cdot(\mathrm{D}W)=\mathrm{d}(\sum_{\alpha}v^{\alpha}w^{\alpha})=\mathrm{d}(V\cdot W).$$

证毕.

由 DV 的定义(1.3),可见绝对微分是曲面的内蕴属性,D 也称为**共变微分**,或 Levi-Civita **联络**.

设曲面M上一条曲线C:$u^{\alpha}=u^{\alpha}(s)(\alpha=1,2)$,其中$s$是一般参数.若曲面$M$上沿曲线$C$的向量场$V(u^{\alpha}(s))=V(s)$满足$\mathrm{D}V/\mathrm{d}s=0$,即

$$\frac{\mathrm{d}v^{\alpha}}{\mathrm{d}s}+v^{\beta}\frac{\omega_{\beta}^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=0,\tag{1.5}$$

则称$V(s)$沿曲线C是**平行的**.由微分方程理论知道,若在C的一点$u_0^{\alpha}=u^{\alpha}(s_0)$处给出曲面一个切向量$V_0=v_0^{\alpha}e_{\alpha}$,则方程组(1.5)对于初始条件:$s=s_0$时$v^{\alpha}=v_0^{\alpha}$,存在唯一解$v^{\alpha}=v^{\alpha}(s)$.沿曲线$C$的向量场$V=v^{\alpha}(s)e_{\alpha}$平行于给定的向量$V_0$,称为向量$V_0$沿曲线$C$的**平行移动**.

由绝对微分的性质(命题 1.1)容易证明下面的命题.

命题 1.2 向量沿曲面上一条曲线平行移动时,保持向量的长度不变,也保持两向量的夹角不变.

与欧氏空间中向量平行移动不同的是曲面上平行移动依赖于路径(曲线).现设曲线C是曲面M上的简单光滑闭曲线,把向量V_0沿闭曲线C平行移动一周后所得平行向量场$V(s)$在终点(也是起点)的向量V_1一般与V_0是不重合的.我们来计算两者相差多少?不失一般性,可设V是单位向量场,且在曲面上选取幺正活动标架$\{x;e_1,e_2,e_3\}$,使e_3是曲面的法向量场.

设在弧长s处,e_1与V的正向夹角为$\alpha(s)$,故有(见图 Ⅳ-2)

$$V(s)=\cos\alpha(s)e_1(s)+\sin\alpha(s)e_2(s).$$

由V的平行性知道,$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}s}=0$,利用绝对微分性质,我们有

$$0=\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}s}=(-\sin\alpha\, e_1+\cos\alpha\, e_2)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}+(\cos\alpha\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s}+\sin\alpha\frac{\mathrm{D}e_2}{\mathrm{d}s}),$$

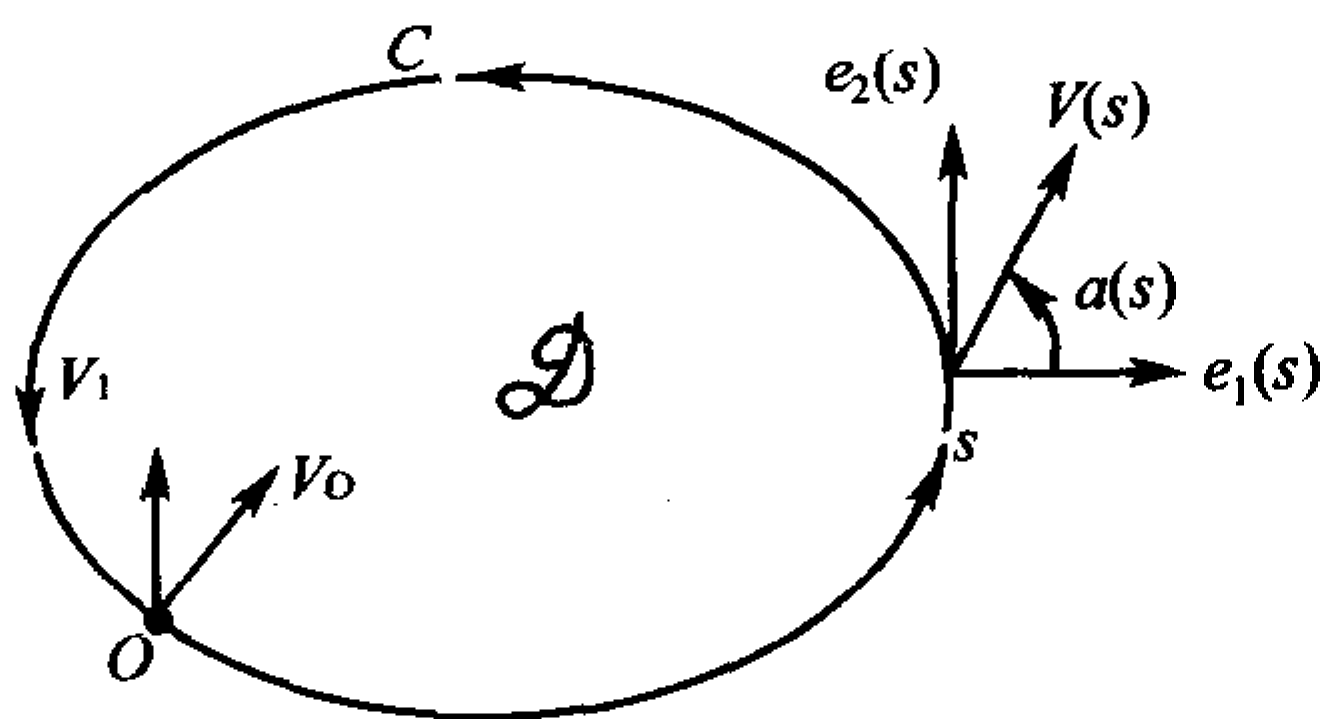


图 Ⅳ-2

上式与$(-\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2)$作内积,利用$e_1,e_2$的正交性得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = -(-\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2)\cdot\left(\cos\alpha\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s} + \sin\alpha\frac{\mathrm{D}e_2}{\mathrm{d}s}\right).$$

由于$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$,由绝对微分性质,易知$e_\alpha\cdot \mathrm{D}e_\beta + e_\beta \cdot \mathrm{D}e_\alpha = 0(\alpha, \beta = 1,2)$,因此上式最后可化为

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = -e_2\cdot\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s} = -\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s},$$

即

$$\mathrm{d}\alpha(s) = -\omega_1^2(s). \tag{1.6}$$

将上式沿曲线C积分一周,就得到角差$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$(即$V_1$与$V_0$之夹角)为

$$\Delta\alpha = \oint_C \mathrm{d}\alpha = -\oint_C \omega_1^2 = -\iint_{\mathscr{D}} \mathrm{d}\omega_1^2 = \iint_{\mathscr{D}} K\mathrm{d}A, \tag{1.7}$$

其中应用了 Stokes 公式,$\mathscr{D}$是曲面上闭曲线C围成的区域(见图Ⅳ-2).

1.3 向量场的奇点

曲面上向量场的**奇点**是使这个向量场中的向量成为零向量的点. 例如,本节 1.1 例 2 中定义的球面S^2上的向量场W,极N和S是它的两个奇点.

设 $x_0 \in M$ 为向量场 $W(x)$ 的奇点，若存在 x_0 的一个邻域，使在其中除 x_0 外再也没有 $W(x)$ 的奇点，则称 x_0 为 W 的**孤立奇点**. 我们只考虑定向曲面上向量场的孤立奇点.

在紧致(定向)曲面上，若一个向量场只有孤立奇点，则奇点的个数是有限的. 事实上，如果是无限的话，由于紧致性，它们必有极限点，极限点也是奇点，因而与奇点的孤立性矛盾.

现在让我们来描述定向曲面 M 上向量场的孤立奇点的指标. 设 $x_0 \in M$ 是 M 上向量场 W 的孤立奇点，在 x_0 点的一坐标 (u,v) 区域 U 内选取幺正活动标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$，使 $e_1 = x_u/|x_u|$，$e_3 = n$ 为曲面正侧单位法向量场，$e_2 = e_3 \times e_1$. 于是，向量场 $W(u,v)$ 可表示为

$$W(u,v) = p(u,v)e_1 + q(u,v)e_2. \tag{1.8}$$

与它相应的单位向量 $\widetilde{W}$ 为

$$\widetilde{W} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}(pe_1 + qe_2).$$

在 x_0 点的充分小邻域内作一简单闭曲线 $C:[0,l] \to M$，使它在 U 中围成包含 x_0 的单连通区域 $\mathscr{D} \subset U$，并且在曲线内部除 x_0 点外无向量场奇点，在曲线上也无向量场奇点. 又曲线 C 的参数 t 的增加方向和曲面定向相容，即符合右手法则.

沿曲线 $C: u = u(t), v = v(t), t \in [0,l]$，设向量 $\widetilde{W}$ 与 e_1 的交角为 φ. 由于 $\mathscr{D}$ 是单连通的，它的边界是简单闭曲线 C，故可通过连续映射使 $\mathscr{D}$ 变换成平面上的一个单连通区域，C 变换成平面简单闭曲线，$\widetilde{W}$ 变换成平面区域上的向量场. 因此，类似于第二章中讨论平面曲线切线旋转指标定理那样，我们可选取 φ 为 t 的可微函数[1]. 沿曲线 C，函数 p 和 q 表示为 $p(t)$ 和 $q(t)$. 由于

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}\ (p \neq 0),\ \text{或}\ \operatorname{ctg}\varphi = \frac{p}{q}\ (q \neq 0).$$

两者必有一成立，故得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{pq' - qp'}{p^2 + q^2}. \tag{1.9}$$

绕 C 一周时，$\widetilde{W}$ 回到原处，φ 的变化

$$\varphi(l)-\varphi(0)=\oint_C \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\oint_C \frac{pq'-qp'}{p^2+q^2}\mathrm{d}t$$

为 2π 的整数倍 I，我们称之为向量场 W 在孤立奇点 x_0 的**指标**，即

$$I=\frac{1}{2\pi}[\varphi(l)-\varphi(0)]=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{pq'-qp'}{p^2+q^2}\mathrm{d}t. \qquad (1.10)$$

命题 1.3 孤立奇点的指标与简单闭回路 C 的选取无关.

证明 因为

$$\begin{aligned} p'&=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=p_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+p_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\\ q'&=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=q_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+q_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \qquad (1.11)$$

故由(1.10)得

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{p(q_u\mathrm{d}u+q_v\mathrm{d}v)-q(p_u\mathrm{d}u+p_v\mathrm{d}v)}{p^2+q^2}\\ &=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(\frac{pq_u-qp_u}{p^2+q^2}\mathrm{d}u+\frac{pq_v-qp_v}{p^2+q^2}\mathrm{d}v\right). \end{aligned} \qquad (1.12)$$

因为在奇点 x_0 处，$p^2+q^2=0$，因此为了应用 Stokes 公式，我们在 $\mathscr{D}$ 内以 x_0 为中心作一充分小半径 δ 的测地圆 C_δ，它围成的圆域记为 B_δ，如图 Ⅳ-3 所示. 由于在 $\mathscr{D}$ 上除 x_0 点外，p^2+q^2 处处不为零，从而可把 Stokes 公式应用于区域 $D\backslash B_\delta$ 上. 由(1.12)便得

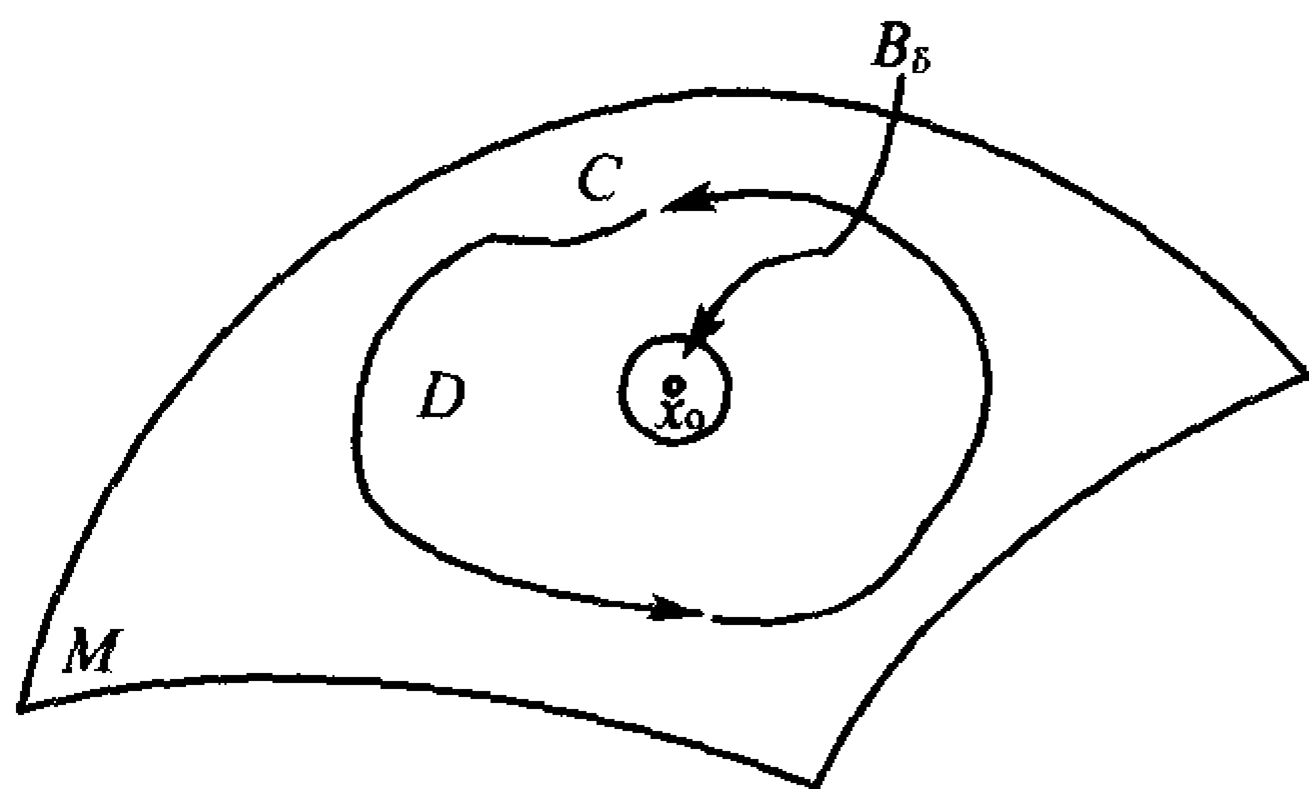


图 Ⅳ-3

$$I = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}\setminus B_\delta}\left[\left(\frac{pq_u - qp_u}{p^2+q^2}\right)_v - \left(\frac{pq_v - qp_v}{p^2+q^2}\right)_u\right]\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\delta}\left(\frac{pq_u - qp_u}{p^2+q^2}\mathrm{d}u + \frac{pq_v - qp_v}{p^2+q^2}\mathrm{d}v\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\delta}\left(\frac{pq_u - qp_u}{p^2+q^2}\mathrm{d}u + \frac{pq_v - qp_v}{p^2+q^2}\mathrm{d}v\right). \qquad (1.13)$$

由于 δ 的任意性,我们可令 $\delta \to 0$,最后可得

$$I = \frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\oint_{C_\delta}\left(\frac{pq_u - qp_u}{p^2+q^2}\mathrm{d}u + \frac{pq_v - qp_v}{p^2+q^2}\mathrm{d}v\right). \qquad (1.14)$$

可见 I 与回路 C 的选取无关. 证毕.

在上面的讨论中,我们确定角 φ 时用到了坐标 u 曲线的切向量 e_1,因此还必须说明向量场孤立奇点的指标 I 与坐标网选取无关. 对此,我们有下列命题.

命题 1.4 曲面上向量场 W 的孤立奇点的指标 I 与曲面上参数网的选取无关.

证明 对于公式(1.10),取沿曲线 C 的平行向量场 V(参考§1.2). 设 V 与 $e_1 = x_u/|x_u|$ 的交角为 ψ. 类似于 W 与 e_1 的交角 φ, ψ 也可取为沿曲线 C 的可微函数. 由曲面上平行移动理论,平行向量场 V 绕 C 一周后的角差(见(1.7))

$$\Delta_C\psi = \iint_{\mathscr{D}} K\mathrm{d}A,$$

其中 K 是曲面的 Gauss 曲率. 由(1.10),φ 的角差 $\Delta_C\varphi$ 为

$$\Delta_C\varphi = 2\pi I.$$

因此

$$\Delta_C(\varphi - \psi) = 2\pi I - \iint_{\mathscr{D}} K\mathrm{d}A. \qquad (1.15)$$

因为 $\varphi - \psi$ 是向量场 W 与平行向量场 V 之间的交角(见图 Ⅳ-4),

是与 e_1 无关的. 所以从(1.15) 可见，奇点的指标 I 也与 e_1 无关，即与曲面参数网 (u,v) 的选取无关. 证毕.

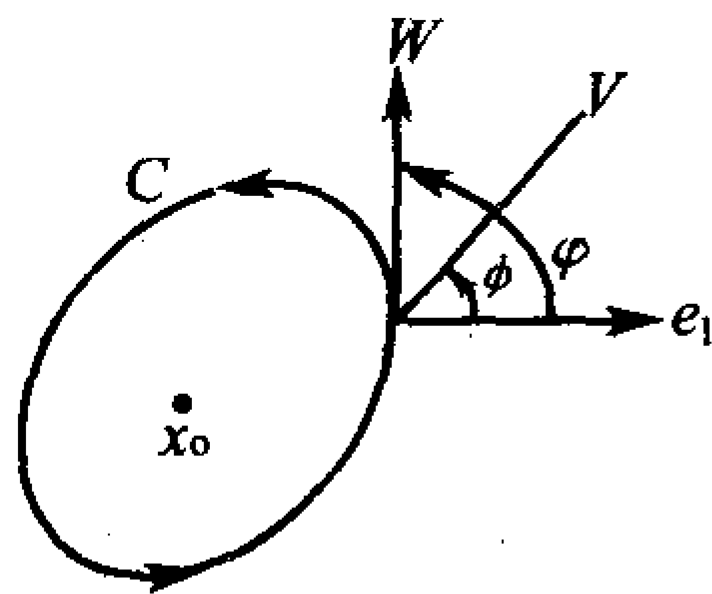


图 Ⅳ-4

对于曲面上不同的向量场，它们的奇点可能不相同，即使奇点相同，它们的指标也可能不同. 但是，对于紧致定向闭曲面，存在下列 Poincarè 的向量场指标定理，它说明了向量场奇点的指标之和是一个拓扑不变量，与向量场的选取无关.

定理 1.5(Poincarè) 设 M 是紧致定向的闭曲面，W 是 M 上只有孤立奇点的向量场，则 W 在所有奇点处的指标之和等于 M 的 Euler-Poincarè 示性数 $\chi(M)$，即

$$\sum_i I_i = \chi(M). \tag{1.16}$$

证明 因为 W 的孤立奇点是有限的，故(1.16) 中左边和式有意义.

把曲面 M 有限三角剖分得充分细，使每个曲面三角形都位于一个坐标邻域中，且使得每个曲面三角形至多只包含一个孤立奇点作为它的内点. 于是，对每个三角形，(1.15) 成立，如果不包含奇点，则这时 $I=0$(可从(1.13)直接推出). 把这些式子相加，再考虑到每个曲面三角形的边界都正、反方向各经过一次，角差相互抵消. 于是得

$$0 = 2\pi\sum_i I_i - \iint_M K\mathrm{d}A.$$

再应用 Gauss-Bonnet 公式，最后便得(1.16). 证毕.

由这个定理立即得到下列推论.

推论 1.6 在不同胚于环面 T^2 的紧致定向闭曲面上，任何向量场必有奇点.

特别是球面上的向量场，如果它们都是孤立奇点，则其指标之和等于2，因此，至少有一个奇点．这个事实有一个形象的比喻：当我们把地球表面各地的风速看成一个向量场时，这个向量场必有奇点，即地球表面至少存在一个地方，该处的风速为零，即没有风．

1.4 抽象曲面上的向量场

为了摆脱对外围欧氏空间的依赖性，必须重新考虑（抽象）曲面 M 上的切向量．设 $\{u^\alpha\}(\alpha=1,2)$ 是区域 $U\subset M$ 上的局部坐标，U 上的一小段曲线 C 可表示为

$$u^\alpha=u^\alpha(t)\quad(a<t<b).$$

设 $F(u^1,u^2)$ 是 U 上的光滑函数，则 F 沿曲线 C 的导数便是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u^\alpha(t))=\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial u^\alpha}=\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)F.$$

因此，曲线 C 的切向量 T 应理解为

$$\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

由此，推广到 $U\subset M$ 上的一般切向量 V 局部地可表示为

$$V=\zeta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha},\tag{1.17}$$

其中 ζ^α 称为向量 V 的分量．区域 $U\subset M$ 上的**切向量场**就是在 U 的每点指定一个切向量，并使它光滑地变化．换言之，(1.17) 中的 ζ^α 是坐标 u^α 的光滑函数．

设

$$\varphi=\varphi_\alpha\mathrm{d}u^\alpha$$

是 $U\subset M$ 上的一次微分形式，我们定义它与切向量(1.17)的**内积**为

$$\langle\varphi,V\rangle=\varphi(V)=\varphi_\alpha\zeta^\alpha.\tag{1.18}$$

对于函数 F 的全微分 $\mathrm{d}F$，利用(1.18)就有

$$\mathrm{d}F(V) = \zeta^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}} = V(F). \tag{1.19}$$

上式右边表示切向量 V 作用在 F 上,即 F 沿 V 的方向导数.

考虑坐标变换 $\bar{u}^{\alpha} = \bar{u}^{\alpha}(u^1, u^2)$,根据

$$\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} = \frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\beta}},$$

可见

$$V = \zeta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} = \left(\zeta^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\beta}}.$$

另一方面

$$\varphi = \varphi_{\alpha} \mathrm{d}u^{\alpha} = \left(\varphi_{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \right) \mathrm{d}\bar{u}^{\beta}.$$

因此,在新坐标 $\{\bar{u}^{\alpha}\}$ 下

$$\varphi(V) = \left(\varphi_{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \right) \left(\zeta^{\gamma} \frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\gamma}} \right) = \varphi_{\alpha} \zeta^{\gamma} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\gamma}} = \varphi_{\alpha} \zeta^{\alpha}.$$

由此可见,(1.18) 定义的内积与坐标选择无关,它可以推广到整个曲面上.

现在假定在曲面 M 上给定一个正定的二次微分形式作为度量:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}(u) \mathrm{d}u^{\alpha} \mathrm{d}u^{\beta} \quad (1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 2).$$

若令

$$\omega_{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta} \mathrm{d}u^{\beta}, \tag{1.20}$$

其中

$$a^1_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad a^1_2 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad a^1_2 = 0,$$

$$a^2_2 = \sqrt{(g_{11} g_{22} - g^2_{12}) / g_{11}},$$

则不难验证

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}u^{\alpha} \mathrm{d}u^{\beta} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2. \tag{1.21}$$

由于 $\det(a^\alpha_\beta) = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} > 0$，故(1.20)定义的 ω^1 与 ω^2 是线性独立的一次微分形式. 现在我们要寻找这样的切向量 e_1 和 e_2，使得

$$\langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \omega^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta{}^\alpha. \tag{1.22}$$

为此，设

$$e_\alpha = b^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \tag{1.23}$$

则(1.22)就是

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即矩阵 (b^β_α) 应是矩阵 (a^α_β) 的逆矩阵. 由于 (a^α_β) 正定，故 (b^β_α) 唯一地存在. 因此，向量 e_1 与 e_2 是唯一地确定的. 反之，当给定线性独立的向量 e_1, e_2 时，也可唯一地确定满足(1.22)的一次形式 ω^1, ω^2.

满足(1.22)的 $\{\omega^\alpha\}$ 和 $\{e_\alpha\}$ 叫做**互为对偶基**. 在 M 的每一点 p，由对偶基确定的两个线性空间分别称为 M 在该点的**切空间**和**余切空间**，它们**互为对偶空间**. 对于 p 点的切空间记为 $T_p(M)$. $\{\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\}$ 称为 $T_p(M)$ 中的**自然基**，$\{e_\alpha\}$ 称为**正交基**. 在余切空间里，与 $\{e_\alpha\}$ 对偶的基 $\{\omega^\alpha\}$ 称为**余正交基**.

对于 $X, Y \in T_p(M)$，$X = \zeta^\alpha e_\alpha$，$Y = \eta^\alpha e_\alpha$，在度量(1.21)下的内积和长度是

$$\langle X, Y \rangle = \sum_\alpha \zeta^\alpha \eta^\alpha,$$
$$\| X \| = \langle X, X \rangle^{1/2}, \quad \| Y \| = \langle Y, Y \rangle^{1/2}. \tag{1.24}$$

由结构方程 $d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta (\omega^\alpha_\beta + \omega^\beta_\alpha = 0)$ 可以唯一地确定 M 上的 Levi-Civita 联络 ω^2_1.

以下，我们来导出本章1.2中共变微分 D 在自然基下的表达式. 为此，对(1.20)两边外微分，利用结构方程，得

$$(da^\alpha_\beta + a^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma) \wedge du^\beta = 0.$$

根据 Cartan 引理,有

$$\mathrm{d}a_\beta^\alpha + a_\beta^\gamma\omega_\gamma^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \mathrm{d}u^\gamma, \quad C_{\beta\gamma}^\alpha = C_{\gamma\beta}^\alpha. \tag{1.25}$$

由(1.20) 和(1.21),易见

$$g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma a_\alpha^\sigma a_\beta^\sigma \quad (\alpha,\beta,\sigma = 1,2). \tag{1.26}$$

对上式两边外微分,利用(1.25) 和(1.24),便得

$$\mathrm{d}g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma (a_\alpha^\sigma C_{\beta\gamma}^\sigma + a_\beta^\sigma C_{\alpha\gamma}^\sigma)\mathrm{d}u^\gamma,$$

即

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \sum_\sigma (a_\alpha^\sigma C_{\beta\gamma}^\sigma + a_\beta^\sigma C_{\alpha\gamma}^\sigma). \tag{1.27}$$

在(1.27) 中,对三个指标 α,β,γ 进行轮换,然后将其中两式相加,再减去第三式,利用(1.25),便有

$$g_{\gamma\sigma}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{Bmatrix} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right) = \sum_\sigma a_\gamma^\sigma C_{\alpha\beta}^\sigma,$$

其中$\begin{Bmatrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}$称为第二类 Christorffel 符号.将(1.26) 代入上式左边,可得

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = a_\sigma^\gamma \begin{Bmatrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}. \tag{1.28}$$

将(1.28) 代入(1.25) 就有

$$a_\beta^\gamma\omega_\gamma^\alpha = -\mathrm{d}a_\beta^\alpha + a_\sigma^\alpha \begin{Bmatrix}\sigma\\ \beta\gamma\end{Bmatrix}\mathrm{d}u^\gamma. \tag{1.29}$$

考虑向量场

$$V = v^\alpha e_\alpha = \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{1.30}$$

利用(1.23) 易见 $v^\alpha b_\alpha^\beta = \zeta^\beta$,即

$$v^\alpha = a_\beta^\alpha \zeta^\beta.$$

把它代入(1.3),利用(1.29),便得

$$\mathrm{D}V = \left(\mathrm{d}\zeta^{\alpha} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} \zeta^{\beta} \mathrm{d}u^{\gamma}\right) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}. \tag{1.31}$$

因此,V 沿曲线平行的条件(1.5)就可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\zeta^{\alpha}}{\mathrm{d}s} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} \zeta^{\beta} \frac{\mathrm{d}u^{\gamma}}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{1.32}$$

这便是普通教科书中沿曲线的平行向量场方程.

习　　题

1. 验证例 1 中向量场 $W(u,s)$ 的轨线就是 T^2 上的经线.

2. 证明命题 1.2.

3. 试证:一个紧致定向闭曲面 $M \subset \mathbf{E}^3$ 上存在一个无奇点的向量场的充要条件是 M 的亏格为 1,即与环面同胚.

4. 设 C 是球面 S^2 上的一条光滑简单闭曲线,V 是 S^2 上可微向量场,而且 V 的轨线恒不与 C 相切. 试证:由 C 决定的 S^2 上的两个紧致区域中的每一个上都至少有 V 的一个奇点.

5. 举例说明非紧致曲面上的向量场可能有无限多个孤立奇点.

§2　测地线与完备曲面

2.1　测地线

设 M 是具有度量 $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}$ 的(抽象)曲面. $\gamma:[a,b] \to M$ 是 M 上的一条曲线,它的局部坐标表示为 $u^{\alpha} = u^{\alpha}(s)$,其中 s 是一般参数. 由本章 1.4 讨论可知,向量场 $V = \zeta^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$ 沿曲线 γ 平行的条件是

$$\frac{\mathrm{d}\zeta^{\alpha}}{\mathrm{d}s} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} \zeta^{\beta} \frac{\mathrm{d}u^{\gamma}}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{2.1}$$

其中$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}$是第二类 Christorffel 符号. 若曲线的切向量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial u^\alpha} \tag{2.2}$$

关于曲线自身是平行的，则曲线 $\gamma(s)$ 称为 M 上的**测地线**. 因此，测地线的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{2.3}$$

这是一个二阶常微分方程，它的解由初始条件

$$\gamma(0) = p, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma(0)}{\mathrm{d}s} = v \tag{2.4}$$

完全确定. 借助于微分方程的理论，我们有下列引理.

引理 2.1 对于曲面 M 上的每点 p_0，存在包含 p_0 的一个坐标邻域 U 及常数 $\varepsilon > 0$，使得对于每点 $p \in U$ 和 p 点切空间 $T_p(M)$ 中每个长度小于 ε 的切向量 v，都有唯一的一条满足初始条件 (2.4) 的测地线

$$\gamma_v : (-2,2) \to M.$$

证明 首先，根据常数微分方程的理论，对于每点 p_0，存在包含 p_0 的一个邻域 U 和常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$，使得对于每点 $p \in U$ 和长度小于 ε_1 的每个切向量 $v \in T_p(M)$，都有唯一的一条满足初始条件 (2.4) 的测地线

$$\overline{\gamma}_v : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \to M.$$

其次，由于测地线方程的齐次性，故若参数曲线 $\gamma(s)$ 是测地线，则参数曲线 $\gamma(cs)$ 也是测地线，这里 c 是任意常数.

现取 $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$. 于是，若 $\|v\| < \varepsilon$，并且 $|s| < 2$，则

$$\left\|\frac{v}{\varepsilon_2}\right\| < \varepsilon_1, \quad |\varepsilon_2 s| < 2\varepsilon_2.$$

因此，只要定义

$$\gamma_v(s) = \overline{\gamma}_{\varepsilon_2 v}(\varepsilon_2 s),$$

就可满足引理的要求. 证毕.

2.2 指数映射 exp

设 $q \in M$, $v \in T_q(M)$, 若存在测地线

$$\gamma : [0,1] \to M$$

满足初始条件

$$\gamma(0) = q, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma(0)}{\mathrm{d}s} = v, \tag{2.5}$$

那么点 $\gamma(1) \in M$ 叫做在 q 点切向量 v 的**指数映像**,用 $\exp_q(v)$ 表示 $\gamma(1)$,而映射

$$\exp_q : T_q(M) \to M \tag{2.6}$$

称为在 q 点的**指数映射**.

于是,满足初始条件(2.5)的唯一测地线可表达为

$$\gamma(s) = \exp_q(sv). \tag{2.7}$$

根据引理 2.1,当 $\|v\|$ 充分小时,$\exp_q(v)$ 是确定的. 一般地说,对于长度较长的向量 v,指数映像 $\exp_q(v)$ 未必能确定. 然而如果能确定,则总是唯一的.

定义 若对于任何点 $q \in M$ 和任何向量 $v \in T_q(M)$,指数映像 $\exp_q(v)$ 总是确定的,则曲面 M 称为**测地完备**的.

显然,测地完备性等价于下述要求:对于每段测地线段 $\gamma_0 : [a,b] \to M$,总能够把 γ_0 延拓成无限长的测地线:

$$\gamma : \mathbf{R} \to M.$$

因此,我们也可把后者作为测地完备性的定义.

2.3 测地线的最短性

在 M 的每点 q 的切空间内,有自然标架 $\left\{\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}$. 任意 $v \in T_q(M)$ 可表示为

$$v = v^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \quad (\alpha = 1,2). \tag{2.8}$$

令集合

$$TM = \{(q,v) \mid q \in M,\ v \in T_q(M)\}, \tag{2.9}$$

它称为 M 的切丛(tangent bundle). 一个自然投射 $\pi : TM \to M$ 定义为

$$\pi(q,v) = q. \tag{2.10}$$

于是,我们可在 TM 中定义开集如下:设 $V \subset TM$ 是子集,若 $\pi(V) \subset M$ 在 M 中是开的,则称 V 是 TM 中的开集. 这样,TM 可成为一个拓扑流形. 对于 TM 考虑它的局部坐标,若 (u^1,u^2) 是 M 中一开集 U 的局部坐标,而对 $q \in U$,它的切向量 v 由(2.8)确定,那么函数组 $\{u^1,u^2,v^1,v^2\}$ 就定义为开集 $V \subset TM$ 的局部坐标,这里 $\pi(V) = U$.

由引理 2.1 可知,对于每点 $p \in M$,在点 $(p,0) \in TM$ 的一个邻域 V 内,映射

$$(q,v) \to \exp_q(v)$$

是确定的,其中 $(q,v) \in V$,而且这个映射在 V 中是可微分的.

现在,考虑这样的光滑映射

$$F : V \to M \times M, \quad V \subset TM,$$

其中 F 定义为

$$F(q,v) = (q, \exp_q(v)), \quad (q,v) \in V. \tag{2.11}$$

可以证明,映射 F 的 Jacobian 在点 $(q,0) \in V$ 是非奇异的. 事实上,在 U 中测地线的幂级数展开式是

$$\begin{aligned} u^{\alpha}(s) &= u^{\alpha}(0) + \left(\frac{du^{\alpha}}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u^{\alpha}}{ds^2}\right)_0 s^2 + \cdots \\ &= u_1^{\alpha} + v^{\alpha}s - \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} v^{\beta}v^{\gamma}s^2 + \cdots, \end{aligned}$$

其中 $\{u_1^{\alpha}\}$ 是 q 点的局部坐标,$\{v^{\alpha}\}$ 是测地线的初始向量在自然标

架下的分量，即 $v = v^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$. 于是，若用 $\{u_1^{\alpha}, u_2^{\alpha}\}$ 表示 $U \times U \subset M \times M$ 的局部坐标，则(2.11)可表示为

$$F(u_1^1, u_1^2; v^1, v^2) = (u_1^1, u_1^2; u_2^1, u_2^2),$$

其中

$$u_2^{\alpha} = u_1^{\alpha} + v^{\alpha} - \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} v^{\beta} v^{\gamma} + \cdots.$$

因此，不难计算得

$$\det \left.\frac{\partial(u_1^1, u_1^2; u_2^1, u_2^2)}{\partial(u_1^1, u_1^2; v^1, v^2)}\right|_{(q,0)} = \left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \neq 0,$$

即 F 的 Jacobian 在 $(q,0)$ 处非奇异. 于是，根据隐函数定理，F 把 $(q,0) \in TM$ 的某个邻域 V' 可微同胚地映到 $(q,q) \in M \times M$ 的某个邻域上. 我们可以认为 V' 中的点 (q_0, v) 是这样的：q_0 属于 q 的一个已知邻域 U'，而 $\|v\| < \varepsilon$. 选取 q 的一个更小的邻域 W，使 $F(V') \supset W \times W$，那么，我们证明了下列

引理 2.2　对于每点 $q \in M$，存在这样一个邻域 W 和常数 $\varepsilon > 0$，使得：

(Ⅰ) W 中任何两点可用唯一的一条长度小于 ε 的测地线连接起来；

(Ⅱ) 这条测地线光滑地依赖于两点，即若 $\exp_{q_1}(sv)$，$0 \leqslant s \leqslant 1$，是连接 q_1 和 q_2 的测地线，则 $(q_1, v) \in TM$ 可微地依赖于 (q_1, q_2)；

(Ⅲ) 对于每点 $q \in W$，映射 $\exp_q$ 把 $T_q(M)$ 中的 ε 开球可微同胚地映到开集 $U_q \supset W$ 上.

注　更详细地说，能够选取 W，使连接其内任两点的测地线全部落在 W 内(参考 J. H. C. Whitehead, Quar. J. Math. (Oxford), 1932 3:33 ~ 42).

设 p,q 是曲面上任意两点，E 是连接 p 到 q 的一切可求长曲线 C 的集合. 令

$$\rho(p,q) = \inf\{l_C | C \in E\},$$

其中 l_C 为曲线 C 的长度，$\rho(p,q)$ 称为 M 上两点 p,q 之间的距离. 对于 ρ，容易验证它满足三角不等式 $\rho(p,q) + \rho(q,r) \geqslant \rho(p,r)$.

现在，我们来讨论测地线长度与上述定义的距离之间的关系.

定理 2.3 设 W 和 ε 如引理 2.2 所述，令

$$\gamma : [0,1] \to M$$

是连接 W 中两点的长度小于 ε 的测地线，而

$$\omega : [0,1] \to M$$

为连接同样两点的任何别的逐段光滑的曲线，那么

$$\int_0^1 \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left\| \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t, \tag{2.12}$$

式中等号成立当且仅当曲线 ω 与测地线重合.

由此可见，这时的测地线长度就是这两个端点之间的距离.

这个定理的证明，依赖于下列两个引理.

引理 2.4 设 $q = \gamma(0)$，U_q 如引理 2.2 所述，在 U_q 中，过 q 点的测地线是下列曲线族的正交轨线：

$$\{\exp_q(v) | v \in T_q(M), \quad \| v \| = \text{const.}\}.$$

证明 设 $t \to v(t)$ 表示 $T_q(M)$ 中使 $\| v(t) \| = 1$ 的任一曲线，我们要证明 U_q 中的对应曲线

$$t \to \exp_q(R_0 v(t)), \quad 0 < R_0 < \varepsilon \tag{2.13}$$

垂直于径向测地线（从 q 点出发的测地线）

$$R \to \exp_q(R v(t_0)). \tag{2.14}$$

作参数化曲面 f 为

$$f(R,t) = \exp_q(R v(t)), \quad 0 \leqslant R < \varepsilon.$$

那么，我们就是要证明：对于一切 (R,t)，

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

对上式的左边共变微分，利用共变微分的性质(Ⅲ)，得

$$\frac{\partial}{\partial R}\left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\partial R}\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right), \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\mathrm{D}}{\partial R}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \right\rangle.$$

因为对于固定的t，曲线$R \to f(R,t)$是测地线，故上式右边的第一项为零. 由于

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial R} \right\| = \| v(t) \| = 1,$$

故上式右边第二项是

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\mathrm{D}}{\partial R}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial R} \right\rangle = 0.$$

因此，$\left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ 与 R 无关. 但当 $R = 0$ 时

$$f(0,t) = \exp_q(0) = q,$$

故

$$\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} = 0.$$

所以，$\left\langle \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ 恒等于零，这就完成了引理 2.4 的证明.

现考虑逐段光滑曲线

$$\omega : [a,b] \to U_q - \{q\},$$

其中每点$\omega(t)$都能用$\exp_q(R(t)v(t))$唯一地表达($0 < R(t) < \varepsilon$)，$\| v(t) \| = 1$, $v(t) \in T_q(M)$.

引理 2.5

$$\int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t \geqslant |R(b) - R(a)|, \tag{2.15}$$

其中等号成立当且仅当 $R(t)$ 单调，$v(t)$ 是常向量.

因此，M 上以 q 为中心的两个同心圆之间的最短曲线是径向测地线.

证明 设 $f(R,t)=\exp_q(Rv(t))$ 使 $\omega(t)=f(R(t),t)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial R}R'(t)+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

由引理 2.4 上式右边的两个向量是互相垂直的，并且因

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial R}\right\|=1,$$

故

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right\|^2=|R'(t)|^2+\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2\geqslant|R'(t)|^2,$$

其中等号成立当且仅当$\frac{\partial f}{\partial t}=0$，即当 $v(t)=\mathrm{const}$. 于是

$$\int_a^b\left\|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right\|\mathrm{d}t\geqslant\int_a^b|R'(t)|\mathrm{d}t\geqslant|R(b)-R(a)|.$$

这里等号成立当且仅当 $R(t)$ 单调，$v(t)$ 不变. 引理 2.5 证毕.

定理 2.3 的证明 考虑任一点

$$q'=\exp_q(Rv)\in U_q,\quad 0<R<\varepsilon,\quad \|v\|=1.$$

设 ω 是从 q 到 q' 的任何逐段光滑曲线，那么对于任何充分小的 $\delta>0$，曲线 ω 必有一段位于半径为 δ 和 R 的两个同心圆之间，见图 Ⅳ-5 所示. 根据引理 2.5，ω 上这段曲线长度大于或等于 $R-\delta$. 令 $\delta\to 0$，则这段曲线的长度不小于 R. 若 $\omega([0,1])$ 与径向测地线 $\gamma([0,1])$ 不重合，则得严格的不等式. 这就完成了定理 2.3 的证明.

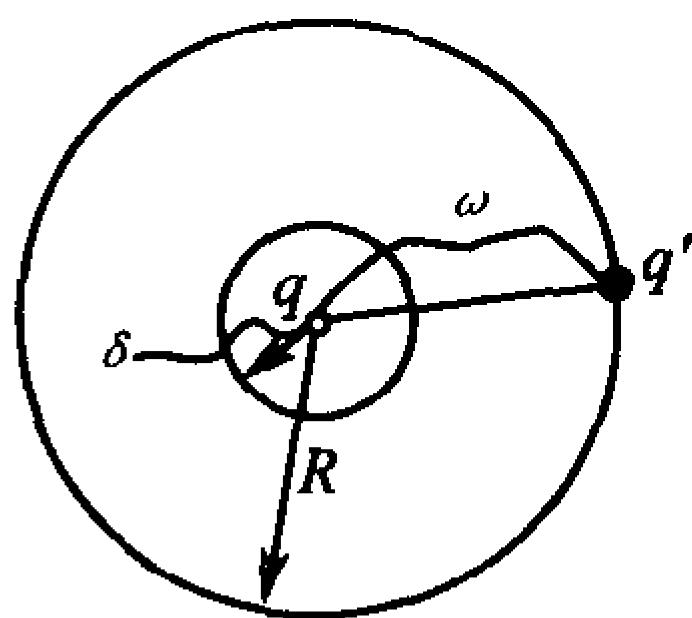


图 Ⅳ-5

定理 2.3 的一个重要推论是

推论 2.6 若以弧长为参数的曲线 $\omega:[0,l]\to M$ 的长度小于或等于任何别的 $\omega(0)$ 到 $\omega(l)$ 的曲线长度，则 ω 必是测地线.

证明 考虑如上述那样的 W，则根据定理 2.3，ω 位于 W 中的长度小于 ε 的一段是测地线，因此整个 ω 是测地线. 证毕.

定义 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一段测地线段，若它的长度小于或等于连接它的两个端点的任何其他逐段光滑曲线的长度，则称曲线 γ 是**极小**的.

由定理 2.3 可知，一条测地线上任何充分小的一段是极小的. 但是，一段较长的测地线可能不是极小的. 例如，球面上的大圆是测地线，但其上一段优弧都不是极小的.

一般地，极小测地线段不一定是唯一的. 例如，球面上两对径点之间有无数条极小测地线. 但是下述论点是正确的.

推论 2.7 设 $K\subset M$ 是紧致的，那么存在常数 $\delta<0$，使得对于 K 中任何距离小于 δ 的两点，能用唯一的一条长度小于 δ 的测地线连接起来. 而且这条测地线是极小的，且可微地依赖于它的端点.

证明 因为 K 紧致，我们可用有限个开集 $\{W_\alpha\}$ 覆盖 K，其中每个 W_α 都如引理 2.2 所说那样. 再取 δ 充分小，使得 K 中任何距离小于 δ 的两点都位于同一个 W_α 中，那么推论 2.7 就得到了证明.

2.4 完备性

在 2.2 中已指出，若曲面 M 上每段测地线都可无限延长，则 M 是测地完备的. 对于测地完备曲面，有下述定理.

定理 2.8(Hopf-Rinow) 若 M 是测地完备的，则其上任何两点都能用一条极小测地线连接起来.

证明 设已给 $p,q\in M$，它们的距离 $R>0$，选取如引理 2.2 所述的那样的邻域 U_p，用 S 表示中心在 p，半径 $\delta<\varepsilon$ 的圆周（M 上的测地圆）.

因为 S 紧致，故在 S 上存在一点 p_0，

$$p_0=\exp_p(\delta v),\quad \|v\|=1,$$

使得 p_0 到 q 的距离最短. 若能证明

$$\exp_p(Rv)=q,$$

则测地线段 $t\to\gamma(t)=\exp_p(tv)$，$0\leqslant t\leqslant R$，确定从 p 到 q 的极

小测地线.

这相当于要证明:沿测地线 γ 运动的一点越来越接近 q. 事实上,对于每个 $t \in [\delta, R]$ 将有

$$\rho(\gamma(t), q) = R - t. \tag{1_t}$$

从这个等式,令 $t = R$,便可完成所要的证明.

首先,我们要证明,等式 (1_δ) 是成立的,即

$$\rho(\gamma(\delta), q) = R - \delta.$$

因为从 p 到 q 的每条曲线都必经过 S,故有

$$\begin{aligned}\rho(p, q) &= \min_{l \in S}\{\rho(p, l) + \rho(l, q)\}\\ &= \delta + \rho(p_0, q).\end{aligned}$$

所以 $\rho(p_0, q) = R - \delta$. 由于 $p_0 = \gamma(\delta)$,故 (1_δ) 成立.

设 $t_0 \in [\delta, R]$ 表示使 (1_t) 成立的那些 t 的上确界,即

$$t_0 = \sup_{[\delta, R]}\{t \mid \rho(\gamma(t), q) = R - t\}. \tag{2.16}$$

于是,根据连续性,等式 (1_{t_0}) 也成立.

以下要证明 $t_0 = R$. 用反证法. 若 $t_0 < R$,令 S' 表示中心在 $\gamma(t_0)$,半径为 $\delta'(< \min(\varepsilon, R - t_0))$ 的小圆周(见图 Ⅳ-6).

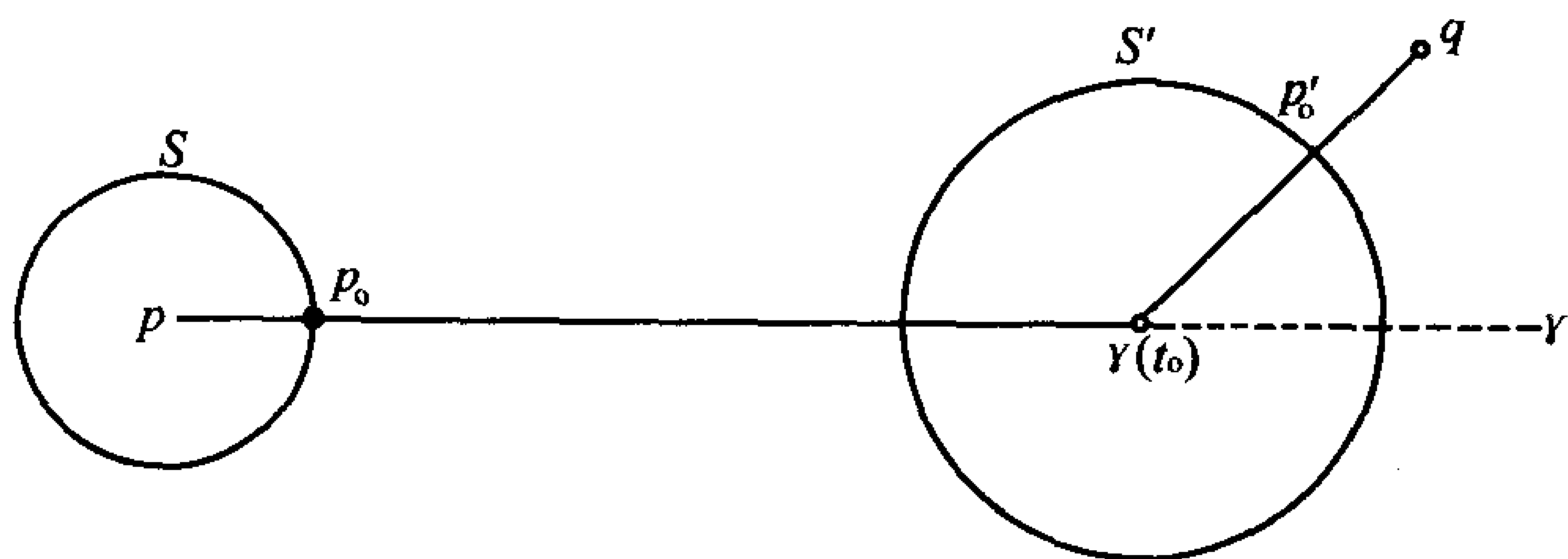


图 Ⅳ-6

设 $p'_0 \in S'$ 是与 q 相距最短的 S' 上的一点. 于是

$$\begin{aligned}\rho(\gamma(t_0), q) &= \min_{l \in S'}\{\rho(\gamma(t_0), l) + \rho(l, q)\}\\ &= \delta' + p(p'_0, q).\end{aligned}$$

因此

$$\rho(p'_0,q) = (R - t_0) - \delta'. \tag{2.17}$$

现在要证明 p'_0 就是 $\gamma(t_0 + \delta')$. 从三角不等式及(2.17)得

$$\rho(p',p'_0) \geqslant \rho(p,q) - \rho(p'_0,q) = t_0 + \delta'.$$

但是,若先沿 γ 从 p 引到 $\gamma(t_0)$,然后再作从 $\gamma(t_0)$ 到 p'_0 的极小测地线,则这样得到的折断测地线的长度正好是 $t_0 + \delta'$,因此这是一段极小的折断测地线. 于是,根据推论 2.6,这是一条不折断的测地线,因此它与 γ 重合.

这样,$\gamma(t_0 + \delta') = p'_0$,于是等式(2.17)化为

$$\rho(\gamma(t_0 + \delta'),q) = R - (t_0 + \delta'). \tag{$1_{t_0+\delta'}$}$$

这与 t_0 的定义(2.16)矛盾,所以 $t_0 = R$. 定理 2.8 证毕.

推论 2.9 若 M 是测地完备的,则 M 的每个有界子集具有紧致闭包. 因此,M 是完备的度量空间(即每个 Cauchy 序列收敛).

证明 若 $N \subset M$ 是直径为 d 的子集,则对于任一点 $p \in N$,指数映射$\exp_p: T_p(M) \to M$把$T_p(M)$中半径为d的圆盘映到M的一个紧致子集上,而这个紧致子集包含N(根据定理 2.8). 所以,N的闭包是紧致的. 证毕.

反过来,若 M 是完备度量空间(关于 Riemann 度量),则利用引理 2.2 不难证明 M 是测地完备的. 因此,我们有下列定理[6].

定理 2.10 对于曲面 M,下列几种说法是等价的:

(Ⅰ)M 是测地完备的;

(Ⅱ)对于任一点$q \in M$,指数映射$\exp_q$在整个$T_q(M)$上有定义;

(Ⅲ)M 关于其 Riemann 度量是完备的度量空间.

鉴于上述定理,测地完备曲面亦称为完备曲面.

习 题

1. 设 $M \subset \mathbf{E}^3$ 是完备曲面,$F \subset M$ 是 M 的非空子集且余集

$M\backslash F$ 为连通集，试证 $M\backslash F$ 是非完备曲面.

2. 证明：去掉顶点的锥面 $S=\{(x,y,\sqrt{x^2+y^2})\mid x^2+y^2\neq 0\}$ 上任意两点之间可用 S 上的极小测地线连接.

§3 弧长的第一变分

3.1 曲线的变分

设 M 是一个光滑曲面，$\gamma:[0,l]\to M$ 是光滑曲线. 为简单起见，我们假定这里的参数 $s\in[0,l]$ 是弧长，γ 的变分是可微映射 $\bar{\alpha}:[0,l]\times(\varepsilon,-\varepsilon)\to M$，使得

$$\bar{\alpha}(s,0)=\gamma(s),\quad s\in[0,l],$$

并且对任何 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，有

$$\bar{\alpha}(0,t)=\gamma(0),\quad \bar{\alpha}(l,t)=\gamma(l).$$

直观上说，对每个固定 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\bar{\alpha}(\cdot,t):[0,l]\to M$ 给定了一条起点为 $\gamma(0)$，终点为 $\gamma(l)$ 的曲线 $\bar{\alpha}_t(s)$. 所以 γ 的变分其实就是给出了一族端点固定的曲线（见图 Ⅳ-7）.

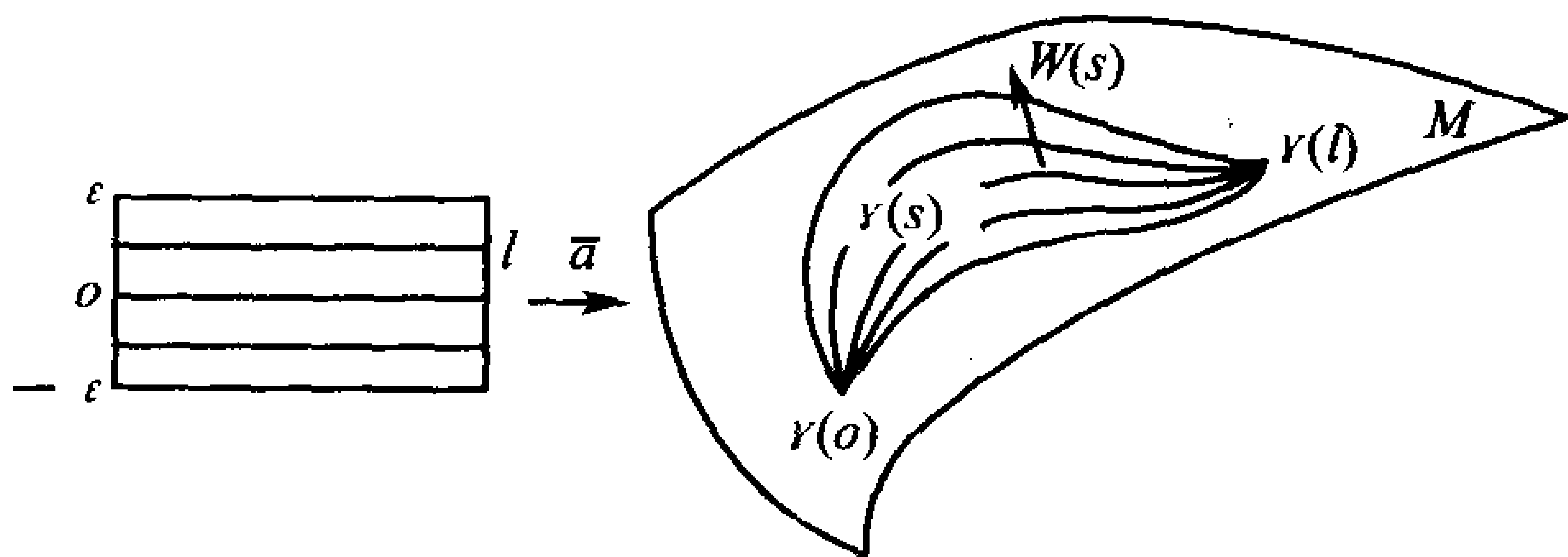


图 Ⅳ-7

另一方面，对每个固定的 $s\in[0,l]$，$\bar{\alpha}(s,\cdot):(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 也给定了 M 的一条经过 $\bar{\alpha}(s,0)=\gamma(s)$ 的曲线 $\bar{\alpha}_s(t)$（可能退化为一

点)，这条曲线在点 $\gamma(s)$ 的切向量为 $\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}(s,0)$. 由此可知，$\gamma$ 的变分 $\bar{\alpha}$ 决定了沿 γ 的可微向量场 $W(s) = \frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}(s,0)$，这个向量场称为 $\bar{\alpha}$ 的**变分向量场**. 显然，我们有 $W(0) = W(l) = 0$.

反之，若给定沿 γ 的变分向量场 W 使得 $W(0) = W(l) = 0$，则存在一个变分 $\bar{\alpha}:[0,l] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ 使得 $W(s)$ 是 $\bar{\alpha}$ 的变分向量场，这是因为我们可置变分 $\bar{\alpha}$ 为

$$\bar{\alpha}(s,t) = \exp_{\gamma(s)} t\, W(s).$$

3.2 第一变分公式

设 M 是抽象曲面，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积. 一个向量 $v \in T_p(M)$ 的长度 $\|v\|$ 是

$$\|v\| = \langle v,v\rangle^{1/2}.$$

光滑曲线 $\gamma:[0,l] \to M$ 的弧长是

$$L(\gamma) = \int_0^l \|\gamma'(s)\| \mathrm{d}s.$$

对于 γ 的变分 $\bar{\alpha}$，我们用 $L(t)$ 来记曲线 $\bar{\alpha}(\cdot,t)$ 的弧长. 这样，我们定义了一个函数 $L:(-\varepsilon,\varepsilon) \to R$，

$$L(t) = \int_0^l \left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}(s,t)\right\| \mathrm{d}s, \quad t \in (-\varepsilon,\varepsilon). \tag{3.1}$$

由(3.1)式定义的函数 L，在 $t = 0$ 的一个邻域中是可微分的，在这种邻域中，L 的导数可用积分号下求微分的方法求得. 于是，我们可计算 L 在 $t = 0$ 的一阶导数，得到

定理 3.1 设 $\bar{\alpha}:[0,l] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ 是 γ 的变分，$W(s) = \frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}(s,0)$，$s \in [0,l]$ 是 $\bar{\alpha}$ 的变分向量场，则

$$L'(0) = -\int_0^l \langle A(s), W(s)\rangle \mathrm{d}s, \tag{3.2}$$

其中

$$A(s)=\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)(s,0).$$

证明 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\partial\alpha\partial s}{\ },\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle^{1/2}=\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle^{-1/2}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle,$$

并且由共变微分的定义,容易证明

$$\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)=\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}L'(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle^{1/2}\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle^{1/2}\right\}\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\left\{\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle^{-1/2}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle\right\}\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\left\{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\|^{-1}\cdot\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle\right\}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.3}$$

因为 $\gamma:[0,l]\to M$ 是以弧长为参数的曲线,所以

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial s}(s,0)\right\|=1.$$

于是,我们有

$$L'(0)=\int_0^l\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle_{t=0}\mathrm{d}s.$$

但是根据本章 §1 中命题 1.1(Ⅲ)有

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle.$$

所以

$$\begin{aligned}L'(0)&=\int_0^l\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle_{t=0}\mathrm{d}s-\int_0^l\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle_{t=0}\mathrm{d}s\\&=\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle\Big|_o^l-\int_0^l\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= -\int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} \right\rangle ds.$$

最后一个等式是由于$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}(l,0) = 0$，即 $W(0) = W(l) = 0$. 但是根据 $W(s)$ 与 $A(s)$ 的定义，我们可将最后一个表达式写成如下形式

$$L'(0) = -\int_0^l \langle A(s), W(s) \rangle ds.$$

证毕.

注 1 向量 $A(s)$ 称作曲线 γ 的加速度向量，并且它的模长正好是 γ 的测地曲率的绝对值. 我们看到 $L'(0)$ 仅仅依赖于变分向量场 $W(s)$，而与变分 $\bar{\alpha}$ 本身无关. 表达式(3.2) 通常称为 γ 的弧长的第一变分公式.

注 2 如果 $\bar{\alpha}$ 是分段光滑曲线，则我们可得到类似于(3.2) 的公式，当然它会含有一些附加项，这是由积分$\int_0^l \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} \right\rangle ds$ 引起的.

3.3 第一变分公式的应用

作为第一变分公式的应用，我们可把测地线作为“变分问题”的解来描述，即我们可证明以下的定理.

定理 3.2 设 $\gamma:[0,l] \to M$ 是以弧长为参数的曲线，则 γ 为测地线的充要条件是：对 γ 的任何光滑变分 $\bar{\alpha}:[0,l] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$，有 $L'(0) = 0$.

证明 必要性是平凡的，因为测地线 γ 的加速度向量 $A(s) = \left(\frac{D}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial s}\right)$ 恒等于零，所以，$L'(0) = 0$.

现在假设 $L'(0) = 0$ 对 γ 的每个变分成立，并考虑向量场 $W(s) = f(s)A(s)$. 这里的 $f:[0,l] \to \mathbf{R}$ 是满足 $f(s) \geqslant 0, f(0) = f(l) = 0$ 的实可微函数，$A(s)$ 是 $\bar{\alpha}$ 的加速度向量，构造一个对应于 $W(s)$ 的变分，我们就有

$$L'(0) = -\int_0^l \langle f(s)A(s), A(s)\rangle \mathrm{d}s$$
$$= -\int_0^l f(s) \| A(s) \|^2 \mathrm{d}s.$$

由于 $f(s) \| A(s) \|^2 \geqslant 0$,因此得到

$$f(s) \| A(s) \|^2 = 0.$$

我们来证明上式可推出 $A(s) = 0, s \in [0,l]$. 事实上,若 $\| A(s_0) \| \neq 0$, $s_0 \in (0,l)$,就存在区间 $I = (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$,使得 $\| A(s) \| \neq 0$ 对 $s \in I$ 成立. 选择 $f(s_0) > 0$ 的 f,就有矛盾的结论 $f(s_0) \| A(s_0) \| = 0$. 因此,$\| A(s) \| = 0$ 对 $s \in (0,l)$ 成立. 再由连续性,就有所要的 $A(0) = A(l) = 0$.

因为 γ 的加速度向量现在恒等于零,所以 γ 是测地线. 证毕.

§4 弧长的第二变分及 Jacobi 场

4.1 弧长的第二变分公式

由定理 3.2,今后我们只考虑以弧长为参数的测地线 $\gamma: [0,l] \to M$ 的变分. 为了简化起见,我们将限于正交变分,即我们将假定变分向量场 $W(s)$ 满足条件 $\langle W(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, $s \in [0,l]$. 为了研究弧长泛函 L 在 0 点一个邻域中的性质,我们来计算 $L''(0)$.

定理 4.1(第二变分公式) 设 $\gamma: [0,l] \to M$ 是以弧长 $s \in [0,l]$ 为参数的测地线,$\bar{\alpha}: [0,l] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ 是 γ 的正交变分. 设 $W(s) = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}(s,0)$ 是 $\bar{\alpha}$ 的变分向量场,则

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left\| \frac{\mathrm{D}}{\partial s} W(s) \right\|^2 - K(s) \| W(s) \|^2 \right) \mathrm{d}s, \qquad (4.1)$$

其中 $K(s) = K(s,0)$ 是 M 在 $\gamma(s)$ 的 Gauss 曲率.

证明 根据本章 §3 中(3.3)式，有

$$L'(t)=\int_0^l\left\{\left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\|^{-1}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\right\}\mathrm{d}s.$$

所以

$$\begin{aligned}L''(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l\left\{\left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\|^{-1}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\right\}\mathrm{d}s\\&=\int_0^l\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\right)\left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\|^{-1}\right\}\mathrm{d}s\\&\quad-\int_0^l\left\{\left(\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\right)^2\cdot\left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\|^{-3}\right\}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

但是，当 $t=0$ 时，$\left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}(s,0)\right\|=\left\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right\|=1$，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s},\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right\rangle.$$

因为 γ 是测地线并且变分是正交的，所以当 $t=0$ 时，便有

$$\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}=0,\quad\left\langle\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right\rangle=0.$$

于是

$$\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right\rangle=0.$$

由此可得

$$L''(0)=\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\mathrm{d}s.\tag{4.2}$$

接着我们来研究(4.2)式中的被积函数，根据共变微分的性质

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle&=\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle+\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\\&=\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle-\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle\\&\quad+\left\langle\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t},\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\rangle+\left\|\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned}$$

可以证明当 $V(s,t)$ 是沿变分 $\bar{\alpha}$ 的可微向量场时

$$\frac{\mathrm{D}}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V-\frac{\mathrm{D}}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V=K(s,t)\left(\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\times\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right)\times V,\tag{4.3}$$

其中 $K(s,t)$ 是 M 在点 $\bar{\alpha}(s,t)$ 的 Gauss 曲率. 所以(对 $t=0$)

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle \\
&= K(s)\left\langle\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\times\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\times\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle \\
&= -K(s)\left\langle \|W(s)\|^2\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle \\
&= -K(s)\|W(s)\|^2.
\end{aligned}
$$

另一方面，由于 γ 是测地线，$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(s,0)=0$，所以 $t=0$ 时有

$$
\frac{d}{ds}\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle=\left\langle\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle.
$$

把上面诸式代入(4.2)，便得

$$
\begin{aligned}
L''(0) &= \int_0^l\left(\left\|\frac{D}{\partial s}W(s)\right\|^2-K(s)\|W(s)\|^2\right)ds \\
&\quad+\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle(l,0)-\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\rangle(0,0) \\
&= \int_0^l\left(\left\|\frac{D}{\partial s}W(s)\right\|^2-K(s)\|W(s)\|^2\right)ds.
\end{aligned}
$$

最后一个等式是由于 $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}(l,t)=0$. 证毕.

注 注意到 $W(0)=W(l)=0$，以及

$$
\frac{d}{ds}\left\langle W,\frac{DW}{ds}\right\rangle=\left\langle\frac{DW}{ds},\frac{DW}{ds}\right\rangle+\left\langle W,\frac{D^2W}{ds^2}\right\rangle,
$$

则我们可将变分公式改写为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l\left(\left\langle\frac{DW}{ds},\frac{DW}{ds}\right\rangle-K\langle W,W\rangle\right)ds \\
&= \left[\left\langle W,\frac{DW}{ds}\right\rangle\right]\Big|_0^l-\int_0^l\left\langle\frac{D^2W}{ds^2}+KW,W\right\rangle ds \\
&= -\int_0^l\left\langle\frac{D^2W}{ds^2}+KW,W\right\rangle ds,
\end{aligned}
$$

即

$$
L''(0)=-\int_0^l\left\langle\frac{D^2W}{ds^2}+KW,W\right\rangle ds. \qquad (4.1')
$$

这个公式是比较有用的.

4.2 Jacobi 场

设 γ 是测地线,用 $T=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$ 表示它的切向量. 设 J 是定义在 γ 上的向量场,若 J 满足Jacobi 微分方程

$$\frac{\mathrm{D}^2J}{\mathrm{d}s^2}+K(s)(T(s)\times J(s))\times T(s)=0, \qquad (4.4)$$

其中 $K(s)$ 是 M 在 $\gamma(s)$ 处的 Gauss 曲率,则称 J 是沿测地线 γ 的Jacobi 场.

如果我们选取沿测地线 γ 平行的正交标架场 $\{e_\alpha\}(\alpha=1,2)$,并令

$$J=v^\alpha(s)e_\alpha,$$

则(4.4)式可写成分量的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2v^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+K(s)a^\alpha_\beta v^\beta=0 \quad (\alpha=1,2), \qquad (4.5)$$

其中

$$a^\alpha_\beta=\langle (T\times e_\beta)\times T,e_\alpha\rangle=\delta^\alpha_\beta-\langle e_\beta,T\rangle\langle T,e_\alpha\rangle. \qquad (4.6)$$

特别是,若取弧长 s 为测地线 γ 的参数,则 $e_1=T=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$ 关于 γ 是自身平行的. 因此,若取 e_2 与 e_1 正交并关于 γ 平行,则(4.5)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2v^1}{\mathrm{d}s^2}=0,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}^2v^2}{\mathrm{d}s^2}+K(s)v^2=0.\end{cases} \qquad (4.7)$$

由(4.4)或(4.7)可见,Jacobi 方程具有 2×2 个线性独立解(每个解定义在测地线上),因为它是二阶线性常微分方程组. 根据常微分方程组的理论,每个 Jacobi 场 J 被它的初始条件 $J(0)$,$\frac{\mathrm{D}J(0)}{\mathrm{d}s}$

$\in T_{\gamma(0)}(M)$ 所完全确定.

我们现在要给出 Jacobi 场的几何解释,为此我们需要以下概念.设 $\bar{\alpha}$ 是 γ 的变分(端点不一定固定)

$$\bar{\alpha}:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,$$

使得 $\bar{\alpha}(s,0)=\gamma(s)$,并且对任意固定的 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,曲线 $\bar{\alpha}(s,t)$ 也是测地线,这样的变分称为**测地变分**.

定理 4.2 若 $\bar{\alpha}$ 是 γ 的测地变分,则变分向量场

$$W(s)=\frac{\partial\bar{\alpha}(s,0)}{\partial t}$$

是关于 γ 的 Jacobi 场.

证明 若 $\bar{\alpha}$ 是 γ 的测地变分,则 $\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}(s,t)$ 恒为零.根据(4.3)就有

$$\begin{aligned}0&=\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}=\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}+K(s,t)\left(\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\times\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right)\times\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\\&=\frac{D^2}{\partial s^2}\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}+K(s,t)\left(\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\times\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial t}\right)\times\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}.\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时,我们就有

$$\frac{D^2}{\partial s^2}W(s)+K(s)(T(s)\times W(s))\times T(s)=0.$$

证毕.

因此,获得 Jacobi 场的一个方法是"转动"测地线,如图 Ⅳ-8 所示.

定理 4.3 沿测地线 $\gamma:[0,l]\to M$ 的每个 Jacobi 场都可从 γ 的测地变分得到.

证明 选取 $\gamma(0)$ 的一个邻域 U,使 U 中任意两点都能用一条唯一的极小测地线连接起来,并且这条测地线光滑地依赖于它的两个端点.设 $\gamma(t)\subset U$, $0\leqslant t\leqslant\delta$,我们先构造沿 $\gamma|_{[0,\delta]}$ 的 Jacobi 场,它具有任意的初始条件.选取一条曲线 $a:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$,使得

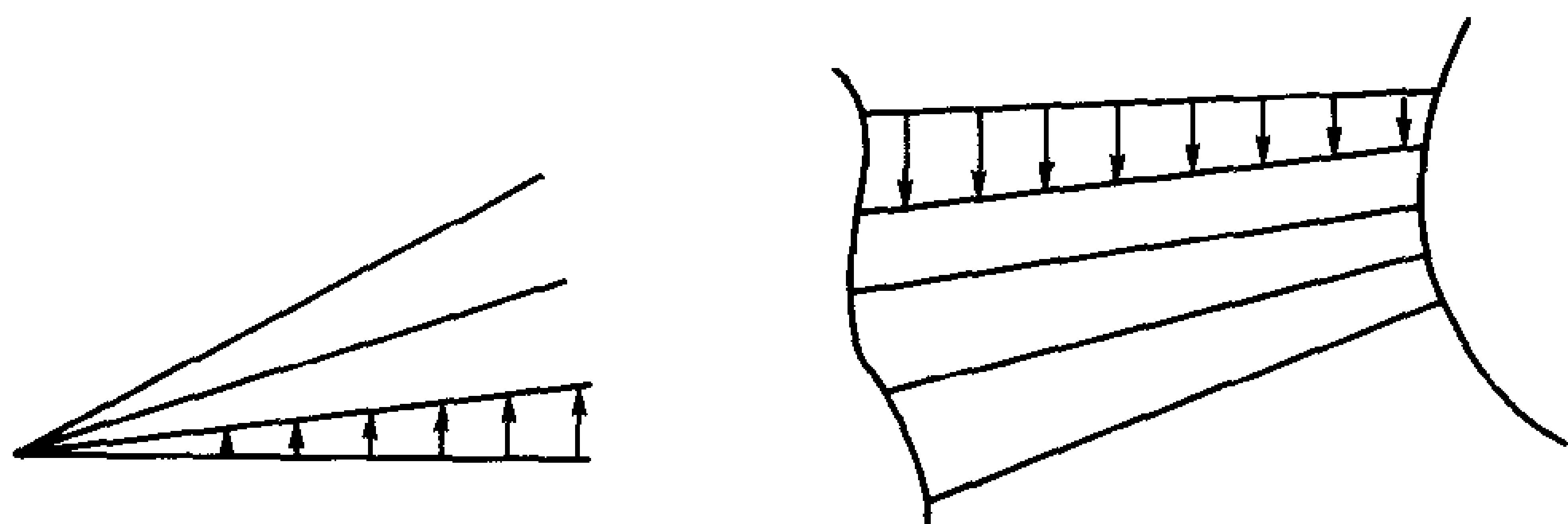


图 Ⅳ-8

$a(0)=\gamma(0)$，而$\frac{\mathrm{d}a(0)}{\mathrm{d}t}$是 $T_{\gamma(0)}(M)$ 中的任意向量. 类似地再选取曲线 $b:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$，使得 $b(0)=\gamma(\delta)$，而$\frac{\mathrm{d}b(0)}{\mathrm{d}t}$是任意的.

定义测地变分

$$\bar{\alpha}:[0,\delta]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$

使对任意固定的 t，曲线 $\bar{\alpha}(\cdot,t):[0,\delta]\to M$ 是从 $a(t)$ 到 $b(t)$ 的极小测地线. 于是，根据定理 4.2，变分向量场$\frac{\partial\bar{\alpha}(s,0)}{\partial t}$定义了一个具有给定端点条件的 Jacobi 场.

沿 $\gamma|_{[0,\delta]}$ 的任意 Jacobi 场可以用以下的方法得到：若 $\mathscr{T}(\gamma)$ 表示沿 γ 的一切 Jacobi 场 W 的向量空间，则公式 $W\to(W(0),W(\delta))$ 定义了一个线性映射

$$L:\mathscr{T}(\gamma)\to T_{\gamma(0)}(M)\times T_{\gamma(\delta)}(M).$$

因为向量空间 $\mathscr{T}(\gamma)$ 和 $T_{\gamma(0)}(M)\times T_{\gamma(\delta)}(M)$ 有相同的维数 2×2，故 L 是同构，即一个 Jacobi 场被它在 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(\delta)$ 的值完全确定. 所以，上述作法就得到了沿 $\gamma|_{[0,\delta]}$ 的一切可能的 Jacobi 场.

$\bar{\alpha}(\cdot,t)$ 在区间$[0,\delta]$上的限制是本质的，若 U 充分小，则利用$[0,l]$的紧致性，$\bar{\alpha}(\cdot,t)$ 能延拓成定义在整个区间$[0,l]$上的测地线. 这样，便得到整个区间$[0,l]$上的测地变分

$$\bar{\alpha}':[0,l]\times(-\varepsilon',\varepsilon')\to M.$$

它以任何给定的 Jacobi 场作为变分向量场. 定理证毕.

4.3 共轭点

定义 设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是 M 上满足 $\gamma(0)=p$ 的测地线. 设点 $q=\gamma(s_0)$, $s_0\in[0,l]$. 如果存在不恒等于零的沿 γ 的 Jacobi 场 $J(s)$, 使得 $J(0)=J(s_0)=0$, 就称点 q 关于测地线 γ 与 p **共轭**.

定理 4.4 设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是 M 上测地线, $p=\gamma(0)$, $q=\gamma(s_0)$, $s_0\in[0,l]$, 如果 p 与 q 是共轭的, 则存在沿测地线 $\gamma:[0,s_0]\to M$ 的(端点固定的)正交变分, 使得 $L''(0)=0$.

证明 因为 p 与 q 是共轭的, 所以存在沿 γ 的 Jacobi 场 $J(s)$, 使得 $J(0)=J(s_0)=0$. 接着我们要证明 $\langle J(s),T(s)\rangle=0$, 其中 $s\in[0,s_0]$, $T(s)=\dfrac{d\gamma}{ds}$.

因为

$$\frac{d^2}{ds^2}\langle J,T\rangle=\frac{d}{ds}\left\langle\frac{DJ}{ds},T\right\rangle=\left\langle\frac{D^2J}{ds^2},T\right\rangle$$
$$=\left\langle-K(T\times J)\times T,T\right\rangle=0,$$

在上面的计算中我们用到了 $\dfrac{DT}{ds}=0$ 及共变导数的性质. 因此 $\langle J,T\rangle(s)$ 是 s 的线性函数, 令

$$\langle J,T\rangle(s)=as+b,$$

其中 $a,b\in R$ 是常数. 于是从 $J(0)=J(s_0)=0$ 可得 $a=b=0$, 所以 $<J,T>=0$.

当 $<J,T>=0$ 时, Jacobi 方程化为

$$0=\frac{D^2J}{ds}+K(T\times J)\times T=\frac{D^2J}{ds}+KJ, \tag{4.8}$$

于是相对于向量场 J 的正交变分 $\bar{\alpha}$, 根据(4.1′)与(4.8), 有

$$L''(0)=-\int_0^{s_0}\left\langle\frac{D^2J}{ds}+KJ,J\right\rangle ds=0.$$

定理证毕.

从分析的角度看，定理4.4说明了如果 p 与 q 沿测地线 γ 是共轭的，则 γ 从 p 到 q 的弧长并不是**严格极小**的.

我们用下例来说明本节中引进的概念.

例 设 $S^2=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$ 是单位球面，$X(\theta,\varphi)$ 是在点 $p\in S^2$ 附近，由余纬度（纬度的余角）θ 和经度 φ 给出的参数表示. 考察在平行环 $\theta=\pi/2$ 上，$\varphi_0=\pi/2$ 和 $\varphi_1=3\pi/2$ 之间的一段弧，这段弧是测地线 γ. 我们假定以 $\varphi-\varphi_0=s$ 为参数把它表示出来. 设 $W(s)$ 是满足 $\|W(0)\|=1$ 和 $\langle W(0),\gamma'(0)\rangle=0$ 的向量 $W(0)\in T_{\gamma(0)}(S^2)$ 沿 γ 的平行移动. 我们来证明：向量场

$$J(t)=(\sin s)W(s),\ s\in[0,\pi],$$

是沿 γ 的 Jacobi 场（见图 Ⅳ-9）.

利用 $K=1$ 和 W 是平行向量场的事实，我们相继得到

$$\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{d}s}=(\cos s)W(s),$$

$$\frac{\mathrm{D}^2J}{\mathrm{d}s^2}=(-\sin s)W(s),$$

$$\frac{\mathrm{D}^2J}{\mathrm{d}s^2}+K(\gamma'\times J)\times\gamma'=(-\sin s)W(s)+(\sin s)W(s)=0.$$

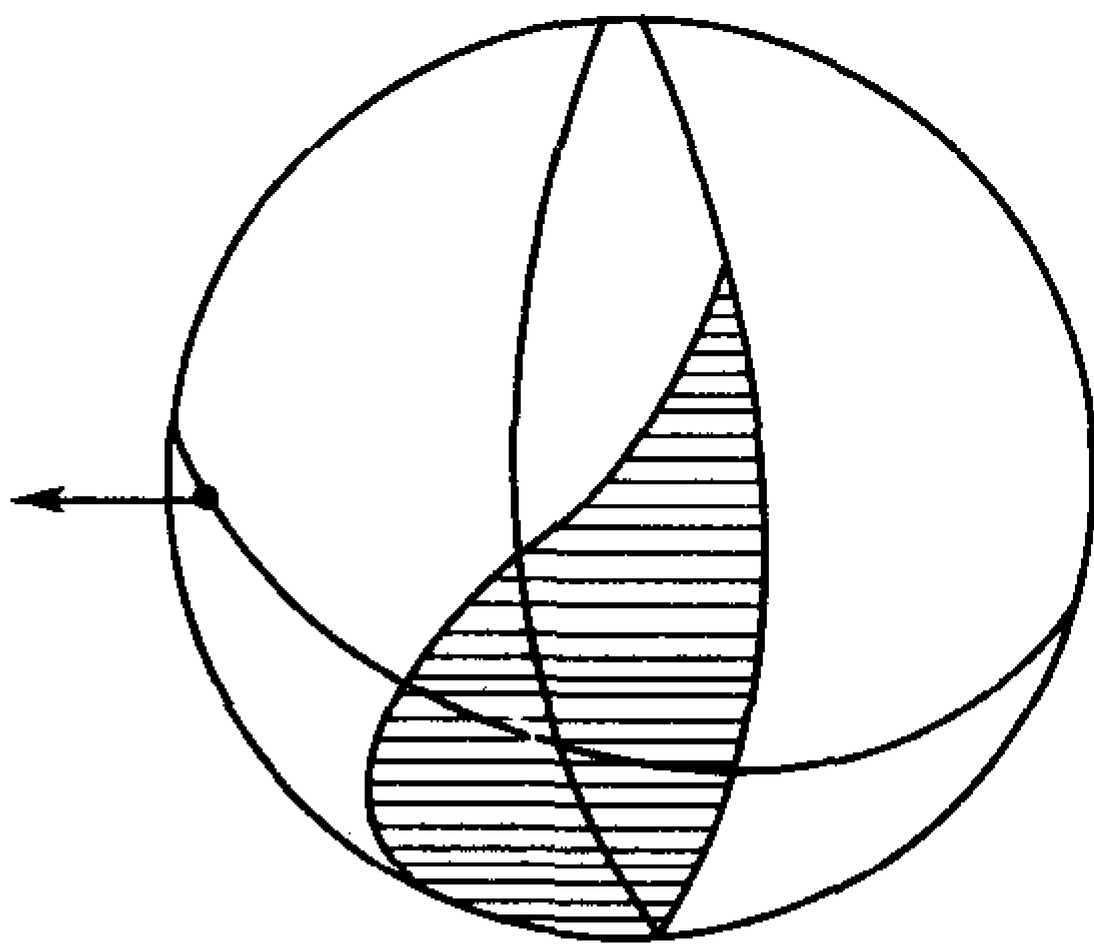


图 Ⅳ-9

这就说明 J 是 Jacobi 场，并且明显有 $J(0)=J(\pi)=0$. 所以单位球面 S^2 上的一点 $p\in S^2$，它的对径点 q 沿从 p 出发的任何测地线，都是与 p 共轭的.

习　题

1. 证明(4.3)式.

2. 证明:抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上的点 $p = (0,0,0)$,没有关于满足 $\gamma(0) = p$ 的测地线 $\gamma(s)$ 的共轭点.

§5　曲率与拓扑

5.1　曲率与 Jacobi 场

设 M 是具有常数 Gauss 曲率 $K = K_0$ 的抽象曲面,则 Jacobi 方程(4.7)化为

$$\ddot{y}(s) + K_0 y(s) = 0, \tag{5.1}$$

其中"·"表示 d/ds. 这时 Jacobi 场是

$$J = y(s)e_2(s),$$

这里 $e_2(s)$ 是沿测地线 $\gamma(s)$(它的切向量是 $e_1 = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$)的单位法向量. 取初始条件

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = a \neq 0,$$

则方程(5.1)的解是

Ⅰ)若 $K_0 > 0$,则 $y(s) = a\sin(\sqrt{K_0}s)\big/\sqrt{K_0}$;

Ⅱ)若 $K_0 = 0$,则 $y(s) = as$;

Ⅲ)若 $K_0 < 0$,则 $y(s) = a\,\mathrm{sh}(\sqrt{|K_0|}s)\big/\sqrt{|K_0|}$.

显然,仅当 $K_0 > 0$ 时存在共轭点,因为 as 和 $a\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{|K_0|}s\right)$ 除 $s = 0$ 外,都不可能有零点.

如果 M 的 Gauss 曲率 K 不是常数,是否有类似的情况呢?为

此，先讨论常微分方程理论中的一个结果.

定理 5.1（Sturm 比较定理） 设 $u(s)$ 是方程 $\ddot{u}(s)+A(s)u(s)=0$ 的满足条件 $u(0)=0$，$\dot{u}(0)=1$ 的解；$v(s)$ 是方程 $\ddot{v}(s)+B(s)v(s)=0$ 的满足条件 $v(0)=0$，$\dot{v}(0)=1$ 的解. 假设 $A(s)\geqslant B(s)$. 若 a,b 分别是函数 $u(s)$ 与 $v(s)$ 在 $s=0$ 之后的第一个零点值，则 $a\leqslant b$. 并且，对于满足 $0<s_0<s_1<a$ 的任意 s_0 和 s_1 成立 $v(s_1)u(s_0)\geqslant u(s_1)v(s_0)$ 和 $v(s_1)\geqslant u(s_1)$.

注 若 $A(s)>B(s)$，则 $a<b$，$v(s_1)u(s_0)>u(s_1)v(s_0)$ 及 $v(s_1)>u(s_1)$.

证明 由于 $\dot{u}(0)=\dot{v}(0)=1$，故对于 $0<s<a$ 的一切 s，有 $u(s)>0$；对于 $0<s<b$ 的一切 s，有 $v(s)>0$. 假设 $a>b$，则有

$$\begin{aligned}0&=\int_0^b[u(\ddot{v}+Bv)-v(\ddot{u}+Au)]\mathrm{d}s\\&=(u\dot{v}-v\dot{u})\big|_0^b+\int_0^b(B-A)uv\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

既然 $A(s)\geqslant B(s)$，故 $(B-A)uv$ 在区间 $[0,b]$ 上的积分非正，因而 $(u\dot{v}-v\dot{u})\big|_0^b$ 是非负的，即 $u(b)\dot{v}(b)\geqslant 0$. 但 $u(b)>0$ 和 $\dot{v}(b)<0$，出现矛盾. 因此 $a\leqslant b$.

现设 $0<s<a$，因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^s[u(\ddot{v}+Bv)-v(\ddot{u}+Au)]\mathrm{d}s\\&=(u\dot{v}-v\dot{u})\big|_0^s+\int_0^s(B-A)uv\mathrm{d}s\\&\leqslant(u\dot{v}-v\dot{u})\big|_0^s,\end{aligned}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log v(s)\geqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log u(s).$$

这样，若 $0<s_0\leqslant s_1<a$，则 $v(s_1)u(s_0)\geqslant u(s_1)v(s_0)$. 既然

$$\lim_{s_0\to 0}v(s_0)/u(s_0)=1,\quad u(0)=v(0)=0,$$

这意味着 $v(s_1) \geqslant u(s_2)$. 证毕.

利用上述定理,容易证明下面的定理.

定理 5.2 设 $\gamma(s)(s \geqslant 0)$ 是弧长为参数的测地线,定义 $K(s) = K(\gamma(s))$ 是测地线上 M 的 Gauss 曲率函数.

(Ⅰ) 若对于一切 s, $K(s) \leqslant K_1$, 则沿着 γ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}\right)$ 内 $\gamma(0)$ 没有共轭点(若 $K(s) < K_1$, 则区间为 $[0, \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}]$).

(Ⅱ) 若对于一切 s, $0 < K_0 \leqslant K(s)$, 则在区间 $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}\right]$ 内 $\gamma(0)$ 至少有一个共轭点(若 $K_0 < K(s)$, 则在 $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}\right)$ 内 $\gamma(0)$ 至少有一个共轭点).

注 若 $K_1 \leqslant 0$, 则 $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ 理解为 $+\infty$.

证明 设 $K(s) \leqslant K_1$, 且 $K_1 > 0$, 令 $B(s) = K(s)$, $A(s) = K_1$, 应用定理 5.1, 这时 $u(s)$ 的解是 $\sin \sqrt{K_1}s \Big/ \sqrt{K_1}$. 因此, 对于 $0 < s < \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$, $v(s)$ 不可能为零. 这就意味着, 沿着 $\gamma(s)$ 具有初始值为零的任何非平凡的 Jacobi 场在 $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}\right)$ 内不可能再有零解. 所以, 在 $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}\right)$ 内 $\gamma(0)$ 没有共轭点.

对于定理中的其他情况,证明是类似的,留给读者作练习.

推论 5.3 设 $\gamma(s)(s \geqslant 0)$ 是弧长为参数的测地线并且在 $\gamma(s)$ 上有 $K_0 \leqslant K(\gamma(s)) \leqslant K_1$, 则沿 γ 在 $[0, \frac{\pi}{\sqrt{K_1}})$ 内 $\gamma(0)$ 没有共

轭点，并且在$\left[\frac{\pi}{\sqrt{K_1}},\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}\right]$内至少有一个共轭点.

因为我们总假定所考虑的抽象曲面 M 是完备的，所以值得考虑的是，对于完备曲面 M，条件 $K \geqslant K_0 > 0$ 蕴涵什么含义. 首先，定理 5.2 表明，每条长度大于 $\pi/\sqrt{K_0}$ 的测地线段，其内部至少有一个共轭点（关于它的起点）.

其次，根据第一和第二变分公式，可见这样的测地段不是极小测地线. 所以，我们有下面的定理.

定理 5.4(Bonnet) 在满足 $K \geqslant K_0 > 0$ 的完备曲面 M 上，任意两点之间的距离最大不超过 $\pi/\sqrt{K_0}$，所以 M 是紧致的（完备有界度量空间）.

5.2 Gauss 曲率非正的曲面

设 M 是完备曲面，我们讨论当 M 的 Gauss 曲率非正时，指数映射有什么特点. 为此，先叙述两个引理.

引理 5.5 设在 M 上 $K \leqslant K_1 (K_1 \geqslant 0)$，定义 $\rho = \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. 设 $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant a < \rho$，是从 $p = \gamma(0)$ 到 $q = \gamma(a)$ 的测地线. 若 $b = b(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$，是从 p 到 q 的另一条曲线，它可以写为

$$b(t) = \exp_p \tilde{b}(t),$$

其中 $\tilde{b}(t)$ 是位于 $B_\rho(0) \subset T_p(M)$ 内的一条曲线，具有 $\tilde{b}(t_0) = 0$，$\tilde{b}(t_1) = a\dot{\gamma}(0)$，那么 $L(b) \geqslant L(\gamma)$.

证明 因为 $K \leqslant K_1$，从定理 5.2(Ⅰ)以及 §2 可知，指数映射 $\exp_p: B_\rho(0) \to M$ 是局部可微同胚. 再根据测地线的最短性，引理得证.

设 $C_0 = C_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$，和 $C_1 = C_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$，是从 p 到 q 的两条曲线，若存在连续映射 $h: [0,1] \times [0,1] \to M$ 使得对每个

$s \in [0,1]$, $C_s(t) = h(t,s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,都是从 p 到 q 的曲线,并且 $C_0(t) = h(t,0)$, $C_1(t) = h(t,1)$,那么我们称曲线 C_0 和 C_1 是同伦的;曲线族 $C_s(t) = h(s,t)$ 称为从 C_0 到 C_1 的同伦.

引理 5.6(Klingenberg,1961) 设 C_0 和 C_1 是从 p 到 q 的两条不同的测地线,并且 $L(C_0) \leqslant L(C_1)$. 设 C_s, $0 \leqslant s \leqslant 1$ 是从 C_0 到 C_1 的同伦,若 $K \leqslant K_1 (K_1 \geqslant 0)$,则存在 $s_0 \in [0,1]$ 使得

$$L(C_{s_0}) + L(C_0) \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}}. \tag{5.2}$$

证明 令 $\rho = \dfrac{\pi}{\sqrt{K_1}}$(当 $K_1 \leqslant 0$ 时,$\rho = +\infty$). 因为 $K \leqslant K_1$,定理 5.2 指出,在 $B_\rho(p)$ 内从 p 出发的一切测地线都没有共轭点,即$\exp_p B_\rho(0)$ 是正则的(即最大秩的). 若 $L(C_0) \geqslant \rho$,则不需证明,故以下我们设 $L(C_0) < \rho$. 令 $\widetilde{C}_0 = \widetilde{C}_0(t) = tC_0'(0)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 是 $T_p(M)$ 中使得 $C_0(t) = \exp_p \widetilde{C}_0(t)$ 的线段,它的始点是 $0 \in T_pM$,它的终点是 $\tilde{q} = \widetilde{C}_0(t_0) \in B_\rho(0)$.

对于充分小的 s,曲线 C_s 可以提升为 $B_\rho(0)$ 中从 0 到 $\tilde{q}$ 的曲线 $\widetilde{C}_s$,即存在曲线 $\widetilde{C}_s$ 使 $C_s(t) = \exp_p \widetilde{C}_s(t)$,曲线 $\widetilde{C}_s(t)$ 连续地依赖于 s(因为 $\exp_p | B_\rho(0)$ 是局部微分同胚,每条 $\widetilde{C}_s$ 必终止于 $\tilde{q}$).

但是,对于一切 $s \in [0,1]$,这样的提升 $\widetilde{C}_s$ 不能存在. 因为 C_1 是测地线,这将使 C_1 和 C_0 相等,这与假设 $C_1 \neq C_0$ 矛盾. 所以,对于每个 $\varepsilon > 0$,必存在一个 $s = s(\varepsilon) \in [0,1]$,使得 $\widetilde{C}_s \subset B_\rho(0)$ 与 $B_\rho(0)$ 的边界的距离小于 ε. 因此 $\widetilde{C}_s$ 的长度至少是 $2\rho - 2\varepsilon - L(C_0)$. 由引理 5.5,$L(C_s) + L(C_0) \geqslant 2\rho - 2\varepsilon$,这个不等式对一切 $\varepsilon < 0$ 都成立,故引理得证.

定理 5.7(Hadamard 定理) 设曲面 M 是连通的、单连通的和完备的,并且在 M 上处处有 $K \leqslant 0$,则对于每点 $p \in M$,指数映射

$$\exp_p : T_p(M) \to M \tag{5.3}$$

是单一的满的可微同胚（换言之，M 可微同胚于 $\mathbf{R}^2$），而且对于 M 上任何两点 p 和 q，存在唯一的连接它们的极小测地线．

证明 由于$K \leqslant 0$，故可利用定理5.2，从而(5.3)是正则的，并且存在局部可微同胚．由于 M 是完备的，故映射(5.3)是满的．

现在证明(5.3)是 $1-1$ 的．设存在 $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1 \in T_p(M)$ 使

$$\exp_p \tilde{q}_0 = \exp_p \tilde{q}_1 = q \in M.$$

令 $\widetilde{C}_i(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，是从 0 到 $\tilde{q}_i (i=0,1)$ 的线段，于是，$C_i(t) = \exp_p \widetilde{C}_i(t)$，$i=0,1$ 是从 p 到 q 的测地线．由于 M 是单连通的，故 C_0 同伦于 C_1．这样，若 $C_0 \neq C_1$，则将和引理5.6矛盾，因为这时 $2\pi/\sqrt{K_1} = +\infty$，故两条不同的测地线不可能同伦．既然 $C_0 = C_1$，因此 $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$，所以(5,3)是 $1-1$ 的．

设 $p \in M$，由上述讨论，对于一切 $\rho > 0$，$B_\rho(p)$ 是测地圆盘．若给定 $q \in M$，选取 $\rho > d(p,q)$，则 $q \in B_\rho(p)$．因此，存在唯一的从 p 到 q 的极小测地线．定理证毕．

习　　题

1．详细证明定理5.2的(Ⅱ)．

2．利用定理5.7证明：在$K \leqslant 0$的完备(连通、单连通)曲面上存在整体的测地极坐标系．

§6　闭测地线与基本群

6.1　闭测地线与基本群

设 M 是完备抽象曲面，$C = C(t) (0 \leqslant t \leqslant \omega)$ 是 M 上的非常值测地线，若 $C(\omega) = C(0)$，$\dot{C}(\omega) = \dot{C}(0)$，则称 C 是**周期为 ω 的闭**

测地线. 如果 ω 是使 $C(\omega)=C(0), \dot{C}(\omega)=\dot{C}(0)$ 成立的最小正数，则 C 称为素闭测地线，通常把素闭测地线简称为闭测地线.

例 1 在球面 S^2 上，参数化的大圆是周期为 2π 的闭测地线.

例 2 设 M 是平环，M 可看作欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 的某个商空间，即在下式定义的 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的等价算子意义下：

$$((m,n),(u,v)) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^2 \to (u+m, v+n) \in \mathbf{R}^2.$$

$\mathbf{R}^2$ 的测地线(直线) $u(t)=a_1t+a_0,\ v(t)=b_1t+b_0 \quad (a_1^2+b_1^2\neq 0)$ 覆盖了 M 上的测地线. 后者是闭测地线的充要条件是 a_1/b_1 (或 b_1/a_1) 是有理数.

固定一点 $p\in M$，令 $\alpha(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1$ 是使 $\alpha(0)=\alpha(1)=p$ 的 M 上的连续曲线，用 $\Omega(p)$ 表示一切这样的曲线的全体，即

$$\Omega(p)=\{\alpha(t)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1,\ \alpha(0)=\alpha(1)=p,\ \alpha(t)\ \text{连续}\}.$$

若 $\beta(t)\in\Omega(p)$，则可以定义曲线

$$\beta*\alpha(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2},\\ \beta[2(1-t)], & \text{当 } \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

显然，$\beta*\alpha(t)\in\Omega(p)$. 用 $1\in\Omega(p)$ 表示常值曲线，$[\alpha]$ 表示 $\Omega(p)$ 中一切与 α 同伦的曲线全体，容易验证：若 $[\beta]=[\beta']$，$[\alpha]=[\alpha']$，则 $[\beta*\alpha]=[\beta'*\alpha']$，并且 $[1*\alpha]=[\alpha]$；若 $\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)$，则 $[\alpha*\alpha^{-1}]=[1]$. 所以运算 $[\alpha]*[\beta]=[\alpha*\beta]$ 是完备定义的，并且集合 $\{[\alpha]\,|\,\alpha\in\Omega(p)\}$ 关于运算 $*$ 构成群. 它的单位元是 $[1]$，逆元是 $[\alpha]^{-1}=[\alpha^{-1}]$. 这个群称为 M 在点 p 的基本群，用 $\pi_1(p)$ 表示之.

若 M 连通，q 是 M 的另一点(见图 Ⅳ-10)，则 $\pi_1(p)$ 同构于 $\pi_1(q)$. 事实上，若 ρ 是从 p 到 q 的曲线，则对于 $[\alpha]\in\pi_1(p)$，$[\rho*\alpha*\rho^{-1}]\in\pi_1(q)$，因而映射 $[\alpha]\to[\rho*\alpha*\rho^{-1}]$ 是同构的. 由于这个原因，对于连通(因而道路连通)的 M，我们可用 $\pi_1(M)$ 表示它的基本群，而不必指明那一点.

例 3　设 $M=S^2$ 是一球面，$p\in S^2$，因为每条曲线 $\alpha\in\Omega(p)$ 是可缩的，即同伦于常值曲线 $C(t)=p$. 所以 $\pi_1(S^2)=\{[1]\}$，这种基本群叫做平凡的.

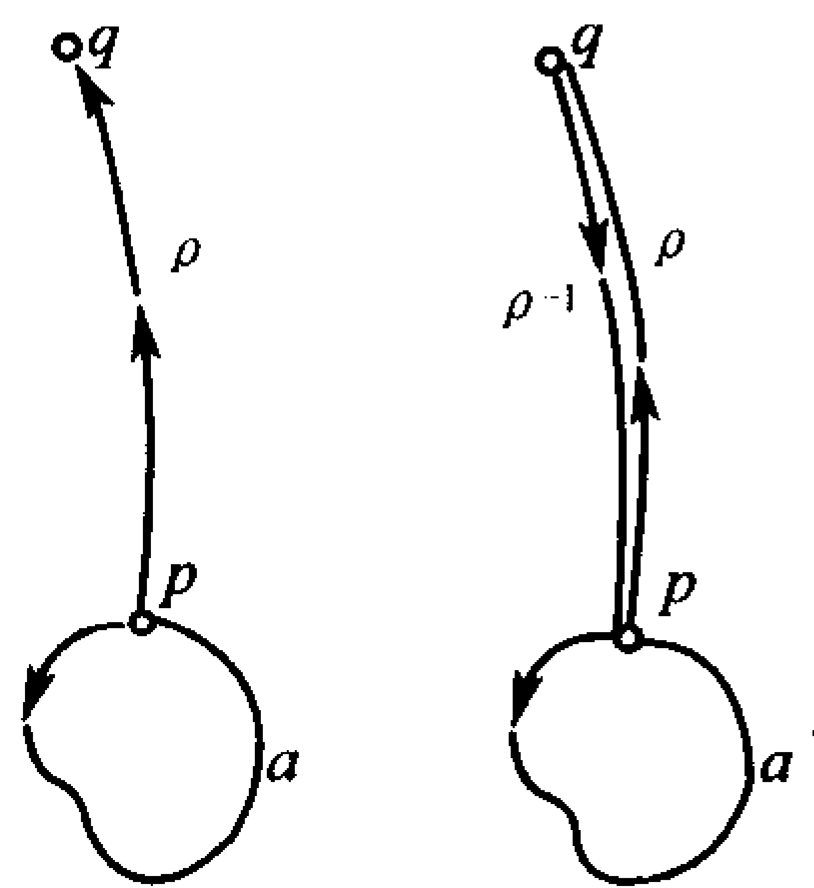


图 Ⅳ-10

例 4　设 $M=T^2$($\mathbf{R}^3$ 中曲面)，因为基本群与度量无关，它仅仅与曲面的拓扑性质有关，故我们可在 T^2 上选取一个方便的度量(例如，从 $\mathbf{R}^3$ 中诱导的度量). 设 α 是环面 T^2 内侧的纬线组成的闭测地线. 固定一点 $p\in\alpha$，令 β 过 p 的经线圆(也是闭测地线). 若令 $\alpha^m=\underbrace{\alpha*\alpha*\cdots*\alpha}_{m\text{次}}$, $\alpha^{-m}=(\alpha^m)^{-1}$，则可以证明，每条曲线 $\gamma\in\Omega(p)$ 同伦于唯一的一条形如 $\alpha^m*\beta^n$ 的曲线，这里 $(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，所以 $\pi_1(T^2)=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$(证明留给读者，或参考 I. M. Singer-J. A. Thorpe. Lecture Notes on Elem. Topo. and Geom.. ,Springer,1976).

6.2　覆盖空间与闭测地线

设 M 和 $\widetilde{M}$ 是连通的局部弧连通的拓扑空间，$\mu:\widetilde{M}\to M$ 是连续映射. 若(Ⅰ)μ 是满射;(Ⅱ)对每点 $p\in M$，存在包含 p 的一个邻域 $U\subset M$，使 $\mu^{-1}(U)$ 是 $\widetilde{M}$ 中不相交的若干开集之和，并且这些开集中的每个都由 μ 同胚地映到 U 上，那么 $\widetilde{M}$ 称为 M 的覆盖空间，μ 称为覆盖映射. 每个这样的 U 称为 M 上的容许邻域.

当 $\widetilde{M}$ 单连通时，则 $\widetilde{M}$ 称为 M 的通用覆盖空间.

例 1　设 $M=S^1=\{z\,|\,z$ 是满足 $|z|=1$ 的复数$\}$，设 $\widetilde{M}=\mathbf{R}$，令 $\mu:\mathbf{R}\to S^1$ 定义为 $\mu(x)=e^{2\pi ix}\in S^1$，$x\in\mathbf{R}$. 于是 $\mathbf{R}$ 便是单位圆周 S^1 的覆盖空间.

例 2 设 $M=T^2,\widetilde{M}=\mathbf{R}^2,\mu:\widetilde{M}\to M$ 定义为

$$\mu(x^1,x^2)=(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x^1},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x^2})\in T^2,(x^1,x^2)\in\mathbf{R}^2.$$

于是 $\mathbf{R}^2$ 便是 T^2 的覆盖空间，显然，$\mathbf{R}^2$ 是通用覆盖空间.

设 $\widetilde{M}$ 是 M 的通用覆盖空间，令 $\mu:\widetilde{M}\to M$ 是覆盖映射. 设 M 是完备曲面，我们可以取 M 的坐标覆盖 $\{U_\alpha,f_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 是由 M 的容许邻域组成的，即对于每个 $\alpha\in\mathscr{A}$，$\mu^{-1}(U_\alpha)$ 是 $\widetilde{M}$ 上若干个不相交开集 $\{\widetilde{U}_{\alpha_i}\}_{i\in I}$ 的并集，使得 $\mu|_{\widetilde{U}_{\alpha_i}}:\widetilde{U}_{\alpha_i}\to U_\alpha$ 是局部可微同胚. 现在，我们在 $\widetilde{M}=\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in\mathscr{A}\\ i\in I}}\widetilde{U}_{\alpha_i}$ 上定义可微分结构如下：令 $\widetilde{f}_{\alpha_i}=f_\alpha\circ\mu|_{\widetilde{U}_{\alpha_i}},i\in I$. 由于 $\widetilde{f}_{\beta_j}\circ\widetilde{f}_{\alpha_i}^{-1}=f_\beta\circ f_\alpha^{-1}$，因此这确实是 $\widetilde{M}$ 上的可微分结构. 而且，我们还可以在 $\widetilde{M}$ 上定义 Riemann 度量[6]，使得 μ 是等距映射. 为此，只要定义 $T_{\widetilde{p}}(\widetilde{M})$ 上的数积 $g_{\widetilde{p}}$：

$$g_{\widetilde{p}}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=g_{\mu(\widetilde{p})}(\mathrm{d}\mu(\widetilde{X}),\mathrm{d}\mu(\widetilde{Y}))\text{，对一切 }\widetilde{X},\widetilde{Y}\in T_{\widetilde{p}}(\widetilde{M}).$$

设 M 的覆盖空间 $\widetilde{M}$ 有一到自身的同胚映射 $\sigma:\widetilde{M}\to\widetilde{M}$，使得 $\mu\circ\sigma=\mu$，则 σ 称为 $(\widetilde{M},\mu)$ 的**覆盖变换**(deck transformation). 设 Γ 表示 M 的基本群，则 Γ 可看作 $\widetilde{M}$ 的**覆盖变换群**（参考 I. M. Singer-J. A. Thorpe 的上述著作），即若 $\gamma\in\Gamma$，则 $\mu\circ\gamma=\mu$. 因此 γ 必是 $\widetilde{M}$ 的局部等距映射.

γ 的**共轭类**是集合 $\{\gamma'\gamma\gamma'^{-1}\mid\gamma'\in\Gamma\}$，$\gamma=1$ 的共轭类就是 $\{1\}$.

定理 6.1 设 M 紧致，$\gamma(\neq 1)$ 是 M 的基本群 Γ 的元素，则在 $\widetilde{M}$ 上存在一条 γ- 不变的测地线 $\widetilde{C}$，即对一切 $t\in\mathbf{R}$，有 $\gamma\widetilde{C}(t)=\widetilde{C}(t+\omega)$. 这里 $|\dot{\widetilde{C}}(t)|=1,\omega=\widetilde{d}(\widetilde{C}(0),\gamma\widetilde{C}(0))$，其中 $\widetilde{d}$ 是 $\widetilde{M}$ 上的距离函数，在映射 $\mu:\widetilde{M}\to M$ 下，$\widetilde{C}$ 投影为 M 上周期等于 ω 的闭测地线 $C=\mu\circ\widetilde{C}$. 闭测地线 C 是 γ 的共轭类的代表.

证明 首先，在 M 的通用覆盖空间 $\widetilde{M}$ 上，γ 没有不动点. 假设不然，有 $\gamma(\widetilde{p})=\widetilde{p}\in\widetilde{M}$，于是，若 $(\widetilde{U}_\alpha,\widetilde{f}_\alpha)$ 是 $\widetilde{p}$ 的坐标卡，则 γ 的局部表示是 $f_\alpha\circ\mu\circ\gamma\circ\mu^{-1}\circ f_\alpha^{-1}:f_\alpha(U_\alpha)\to f_\alpha(U_\alpha)$，但因为 $\mu\circ\gamma=$

μ,故这是恒同映射,这表明在 p 附近 $\gamma =$ 恒同. 根据 $\widetilde{M}$ 的单连通性,在 $\widetilde{M}$ 上 $\gamma =$ 恒同. 这意味着 $\gamma = 1$. 这与定理假设矛盾.

其次,考虑 $\widetilde{M}$ 上的函数 $f(\widetilde{p}) = \widetilde{d}(\widetilde{p},\gamma\widetilde{p})$,因为

$$\widetilde{d}(\widetilde{p},\gamma\widetilde{p}) \leqslant \widetilde{d}(\widetilde{p},\tilde{q}) + \widetilde{d}(\tilde{q},\gamma\tilde{q}) + \widetilde{d}(\gamma\tilde{q},\gamma\widetilde{p})$$
$$= \widetilde{d}(\tilde{q},\gamma\tilde{q}) + 2\widetilde{d}(\widetilde{p},\tilde{q}),$$

故 f 是连续函数. 设 $\{\widetilde{p}_n\}$ 是 $\widetilde{M}$ 上一序列,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{p}_n) = \omega = \inf\limits_{\widetilde{M}} f$. 固定 $\widetilde{p}_0 \in \widetilde{M}$. 令 $d/2 = M$ 的直径 $= M$ 上两点之间的最大距离. 于是,对于每个 $n \geqslant 1$,存在一个 $\gamma_n \in \Gamma$,使得 $\widetilde{d}(\gamma_n\widetilde{p}_n,\widetilde{p}_0) < d$,所以序列 $\{\gamma_n\widetilde{p}_n\}$ 位于紧致集 $\{\widetilde{p} \in \widetilde{M} | \widetilde{d}(\widetilde{p}_0,\widetilde{p}) \leqslant d)\}$ 中(这个集合是有界的,而 $\widetilde{M}$ 是完备的). 所以 $\{\gamma_n\widetilde{p}_n\}$ 有一个极限点,如 $\widetilde{p}'$. 对于充分大的 n, $\widetilde{d}(\gamma\widetilde{p}_n,\widetilde{p}_n) = \widetilde{d}((\gamma_n\gamma\gamma_n^{-1})\gamma_n\widetilde{p}_n,\gamma_n\widetilde{p}_n)$ 接近 ω,而 $\gamma_n\widetilde{p}_n$ 接近 $\widetilde{p}'$, $(\gamma_n\gamma\gamma_n^{-1})\gamma_n\widetilde{p}_n$ 接近 $\gamma_n\gamma\gamma_n^{-1}\widetilde{p}'$. 但在 p' 的固定距离范围内,只能有有限多个不同的点 $\gamma_n\gamma\gamma_n^{-1}\widetilde{p}'$,所以,存在 $\gamma_0 \in \Gamma$,使得对于无限多个 n 值有

$$\gamma_n\gamma\gamma_n^{-1}\widetilde{p}' = \gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}\widetilde{p}'.$$

这表明

$$d(\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}\widetilde{p}',\widetilde{p}') = \omega.$$

定义 $\gamma_0^{-1}\widetilde{p}' = \widetilde{p}$,显然有 $d(\widetilde{p},\gamma\widetilde{p}) = d(\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}\widetilde{p}',\widetilde{p}') = \omega$.

现设 $\widetilde{C}(t)(t \in \mathbf{R})$ 是满足 $\widetilde{C}(0) = \widetilde{p}$, $\widetilde{C}(\omega) = \gamma\widetilde{p}$ 的测地线,因为 $\widetilde{M}$ 是测地完备的,由 Hopf-Rinow 定理 2.8,这样的测地线存在. 我们要证明:对一切 $t \in \mathbf{R}$,有 $\gamma\widetilde{C}(t) = \widetilde{C}(t+\omega)$. 按定义,当 $t = 0$ 时,这是正确的. 当 $t \in [0,\omega]$ 时,这也是正确的,除非测地线 $\widetilde{C}(t+\omega)(t \geqslant 0)$ 和 $\gamma\widetilde{C}(t)(t \geqslant 0)$ 在它们的公共初始点 $\widetilde{C}(\omega)$ 处有不同的切向量. 但这种情况不会发生,因为如果出现这种情况,则有

$$\widetilde{d}(\widetilde{C}(t),\gamma\widetilde{C}(t)) < \widetilde{d}(\widetilde{C}(t),\widetilde{C}(\omega)) + \widetilde{d}(\gamma\widetilde{C}(0),\gamma\widetilde{C}(t)) = \omega,$$

这与 ω 的定义矛盾. 因此在 $[0,\omega]$ 上有 $\gamma\widetilde{C}(t) = \widetilde{C}(t+\omega)$. 从而对

一切 $t \in \mathbf{R}$，有 $\gamma\widetilde{C}(t) = \widetilde{C}(t+\omega)$.

所以，$\widetilde{C}$ 在 μ 下的像 $C(t) = \mu\widetilde{C}(t)$ 是闭测地线 $C(t+\omega) = C(t)$. 定理证毕.

6.3　紧致闭曲面上的闭测地线

如果 M 是紧致闭曲面，我们有下述定理.

定理 6.2　设 $\gamma: M \to M$ 是没有不动点的自身等距. 那么存在一条 γ- 不变测地线 $C = C(t), t \in \mathbf{R}$，即 $\gamma C(t) = C(t+\omega)$. 若 γ 是有限阶的，即若存在自然数 $n > 1$，使 $\gamma^n = 1$，则 C 是周期为 $n\omega$ 的闭测地线.

证明　考虑函数 $f(p) = d(p, \gamma p)$，如同定理 6.1 证明一样，容易证明 f 是连续的. 因为 M 紧致，f 在某点 $p \in M$ 达到极小值，设为 ω，因为 γ 没有不动点，$\omega = f(p) = d(p, \gamma p) > 0$. 设 $C(t)$ 是满足 $C(0) = p$ 和 $C(\omega) = \gamma p$ 的测地线，于是，和定理 6.1 的证明一样，可以证明 $\gamma C(t) = C(t+\omega)$.

若 $\gamma^n =$ 恒同，则立即可得 $C(t)(0 \leqslant t \leqslant n\omega)$ 是闭测地线. 证毕.

例 1　平环 M 具有通用覆盖空间 $\widetilde{M} = \mathbf{R}^2$，每个平移 $\tilde{\tau}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 诱导出 M 的一个等距 τ. 等距 τ 是恒同，当且仅当 $\tilde{\tau}(0,0) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. 假设 $\tilde{\tau}$ 不生成恒同映射，则存在 τ- 不变的闭测地线的充要条件是 $\tilde{\tau}$ 满足

$$\tilde{\tau}(0,0) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} - \mathbf{Z} \times \mathbf{Z},$$

其中 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

例 2　球面 S^2，对径映射是二阶等距，由定理 6.2 闭测地线存在，就是大圆.

注　上节和本节内容选自[5]中 §6.6 和 §6.7. 有关高维 Riemann 流形上的闭测地线理论，可参考 W. Klingenberg. Lectures on Closed Geodesics. G. M. Wiss. 230, Springer, 1978.

习　　题

1. 试证明本节 6.1 中例 2 的 $\pi_1(T^2) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

2. 除了本节 6.3 的例 1 和例 2 外，你是否能再举一个有关存在闭测地线的曲面的例子.

第五章　高维欧氏空间的超曲面

本章讨论高维欧氏空间中的超曲面，这是通常 3 维欧氏空间中曲面论的最直接和最自然的推广.

§1　基本公式

1.1　超曲面的结构方程和曲率张量

设 $\mathbf{E}^{n+1}(n \geqslant 2)$ 是 $n+1$ 维欧氏空间，即具有欧氏内积的 $n+1$ 维向量空间. 在 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中，我们可以建立一个固定的直角坐标系 $\{O;E_1,\cdots,E_{n+1}\}$，即在一固定点 $O \in \mathbf{E}^{n+1}$(称为原点)的 $n+1$ 个有序的相互正交的单位向量. 类似于如第一章所述，$\mathbf{E}^{n+1}$ 中的一个活动幺正标架 $\{x;e_1,\cdots,e_{n+1}\}$ 是指任一点 $x \in \mathbf{E}^{n+1}$ 和在点 x 的任意 $n+1$ 个相互正交的单位向量 $e_1,\cdots,e_{n+1}$，使得它们与固定的向量 $E_1,\cdots,E_{n+1}$ 只差一个保持定向的正交变换. $\mathbf{E}^{n+1}$ 中所有幺正标架的全体构成一个 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 维标架空间. 在本章中，若无特别说明，指标的取值范围约定如下：

$$A,B,C,\cdots = 1,\cdots,n+1;\ i,j,k,\cdots = 1,\cdots,n.$$

类似地，$\mathbf{E}^{n+1}$ 中活动幺正标架的运动方程是

$$\mathrm{d}x = \omega^A e_A, \qquad \mathrm{d}e_A = \omega_A^B e_B, \tag{1.1}$$

其中 ω^A 和 ω_A^B 都是 1- 形式，满足

$$\omega_A^B + \omega_B^A = 0. \tag{1.2}$$

$\mathbf{E}^{n+1}$ 的欧氏度量可表示为

$$ds^2_{\mathbf{E}^{n+1}} = \sum_A (\omega^A)^2.$$

对(1.1)两边外微分，利用(1.1)和(1.2)，我们就得到$\mathbf{E}^{n+1}$的**结构方程**

$$\begin{aligned} d\omega^A &= \omega^B \wedge \omega_B^A, \\ d\omega_B^A &= \omega_B^C \wedge \omega_C^A. \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\mathbf{E}^{n+1}$中的一片(可微)超曲面M是$\mathbf{R}^n$的一个开集U到$\mathbf{E}^{n+1}$的(可微)映射$x: U \to \mathbf{E}^{n+1}$，使得像$M = x(U)$与$U$是微分同胚. 在$M \subset \mathbf{E}^{n+1}$上，选取局部活动幺正标架场$\{x; e_1, \cdots, e_{n+1}\}$，使得$\{e_i\}$与$M$相切，而$e_{n+1}$是$M$在$\mathbf{E}^{n+1}$中的单位法向量. 这样的标架场称为**Darboux标架场**. (1.1)限制在M上有

$$dx = \omega^i e_i, \qquad \omega^{n+1} = 0. \tag{1.4}$$

因此，M的**第一基本形式**(诱导度量)是

$$I = |dx|^2 = \sum_i (\omega^i)^2.$$

对应的体积元是

$$dv_M = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

对(1.4)的第二式外微分，利用(1.3)，得

$$\omega_i^{n+1} \wedge \omega^i = 0.$$

根据Cartan引理(见第一章，§2.2)，上式意味着

$$\omega_i^{n+1} = h_{ij}\omega^j, \qquad h_{ij} = h_{ji}. \tag{1.5}$$

于是，由(1.1)有

$$\begin{aligned} de_i &= \omega_i^j e_j + \omega_i^{n+1} e_{n+1} = \omega_i^j e_j + h_{ij}\omega^j e_{n+1}, \\ de_{n+1} &= \omega_{n+1}^i e_i = -\sum_{i,j} h_{ij}\omega^j e_i. \end{aligned} \tag{1.6}$$

因此，M的**第二基本形式**是

$$II = -dx \cdot de_{n+1} = h_{ij}\omega^i\omega^j. \tag{1.7}$$

把(1.3)限制在M上，利用(1.5)，得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \qquad \omega_j^i + \omega_i^j = 0, \\
&\mathrm{d}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i, \quad \Omega_j^i := \frac{1}{2} R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

其中

$$
R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}. \tag{1.9}
$$

(1.8)和(1.9)式分别称为超曲面 M 的**结构方程**和**Gauss 方程**. 注意,$\{\omega_j^i\}$ 是 M 上的联络形式,它们被(1.8)的第一式唯一确定,因此是内蕴的,即被第一基本形式唯一确定.

设 $f: M \to \mathbf{R}$ 是 M 上的可微函数,类似于第三章的 §9.1,f 的 Laplacian$\triangle f$ 可表达为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}f := f_i\omega^i, \qquad \mathrm{D}f_i = \mathrm{d}f_i - f_j\omega_i^j = f_{ij}\omega^j, \\
&\triangle f = \sum_i f_{ii}.
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

由(1.9)可见,R_{ijkl} 具有下列代数性质:

$$
\begin{aligned}
&R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \\
&R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

当 $n = 2$ 时,(1.9)化为

$$
R_{1212} = h_{11}h_{22} - (h_{22})^2.
$$

上式右边正是 $\mathbf{E}^3$ 中曲面的 Gauss 曲率 K 的表达式(见第一章,3.3.2). 因此,这时 $R_{1212} = K$. 一般地,在每点 $x \in M$,$\{e_i\}$ 张成 M 的一个(n 维)切空间,其中任意两个向量 e_i 和 e_j 张成的 2 维子空间称为一个**平截面**. 推广曲面 Gauss 曲率的概念,我们把 R_{ijij} 称为这个平截面的**截面曲率**,而 R_{ijkl} 称为 M 的**黎曼曲率张量**(分量),由(1.8)知,它们是内蕴的. 由(1.9)得

$$
R_{jk} := \sum_i R_{ijik} = nHh_{jk} - \sum_i h_{ij}h_{ik}, \tag{1.12}
$$

其中

$$
H := \frac{1}{n}\sum_i h_{ii} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A} = (h_{ij}).
$$

H 称为 M 的平均曲率，R_{jk} 称为 M 的 Ricci 张量(分量). 于是，

$$R_{jj} = \sum_i R_{ijij} = nHh_{jj} - \sum_i (h_{ij})^2$$

是 $n-1$ 个截面曲率之和，称为关于 e_j 的 Ricci 曲率. 把 n 个 Ricci 曲率相加，得

$$R := \sum_j R_{jj} = n^2H^2 - S, \qquad S := \sum_{i,j} (h_{jj})^2. \tag{1.13}$$

式中 R 和 S 分别称为超曲面 M 的数量曲率和第二基本形式模长平方.

1.2 主曲率与平均曲率

对(1.5)的第一式外微分，利用(1.8)，得

$$\sum_j (\mathrm{d}h_{ij} - h_{kj}\omega_i^k - h_{ik}\omega_j^k) \wedge \omega^j = 0.$$

应用 Cartan 引理，可见

$$\mathrm{D}h_{ij} \equiv \mathrm{d}h_{ij} - h_{kj}\omega_i^k - h_{ik}\omega_j^k = h_{ijk}\omega^k, \tag{1.14}$$

$$h_{ijk} - h_{ikj} = 0. \tag{1.15}$$

由(1.14)表达的 Dh_{ij} 称为 h_{ij} 的共变微分，(1.15)称为超曲面 M 的Codazzi 方程.

(1.5)的第二式表明 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (h_{ij})$ 是对称矩阵，故存在局部幺正标架场 $\{e_i\}$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 对角化：

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}. \tag{1.16}$$

特征值 λ_i 称为超曲面 M 的主曲率，对应的特征标架 e_i 称为主方向.

令

$$\sigma_0 := 1, \quad \sigma_r := \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}, 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{1.17}$$

式中 σ_r 是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的 r 次初等对称函数. 于是，超曲面 M 的 r 次平均曲率 H_r 定义为

$$\binom{n}{r} H_r = \sigma_r. \tag{1.18}$$

显然，H_1 就是上面定义的平均曲率 H. 由(1.13)与(1.16)，可见

$$R = n(n-1)H_2. \tag{1.19}$$

因此，$\mathbf{E}^{n+1}$ 中超曲面 M 的 2 次平均曲率 H_2 是内蕴的. 特别地，M 的 n 次平均曲率 H_n 是

$$H_n = \sigma_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(h_{ij}),$$

它也称为超曲面 M 的 Gauss-Kronecker 曲率.

注意到 λ_i 是行列式方程 $\det(h_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$ 的根，我们易见

$$\det(h_{ij} + \lambda\delta_{ij}) = \sum_{r=0}^{n} \sigma_r \lambda^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r \lambda^{n-r}. \tag{1.20}$$

现令

$$S_r := \sum_i (\lambda_i)^r = \operatorname{tr}(A)^r, \quad 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{1.21}$$

显然，$S_2 = S$. 根据牛顿公式，从(1.17)和(1.20)得

$$S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}\sigma_{r-1}S_1 + (-1)^r r\sigma_r = 0. \tag{1.21}$$

从(1.21)我们可用 S_i 表达 σ_r：

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= S_1, \\
\sigma_2 &= \frac{1}{2!}(-S_2 + S_1^2), \\
\sigma_3 &= \frac{1}{3!}(2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3), \\
&\cdots\cdots \\
\sigma_r &= \sum_{\substack{i_1+2i_2+\cdots+ri_r=r \\ i_p \geqslant 0 (1\leqslant p \leqslant r)}} \frac{(-1)^{i_1+\cdots+i_r+r}}{\Pi_{p=1}^r i_p!\, p^{i_p}} \prod_{p=1}^{r} S_p^{i_p}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

§2 积分公式

2.1 Minkowski 积分公式

设 $\mathbf{E}^{n+1}(n \geqslant 2)$ 是 $n+1$ 维欧氏空间，M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中紧致无边的定向超曲面（请参考第三章，§1 的类似概念）. 设 $\{x;e_1\cdots,e_n,e_{n+1}=\boldsymbol{n}\}$ 是沿 M 的局部 Darbous 幺正标架场，其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面上整体定义的单位法向量，x 也表示 M 的位置向量. 令

$$p:=x\cdot e_{n+1},\quad p_i:=x\cdot e_i, \tag{2.1}$$

其中 p 称为 M 的支持函数. 根据(1.10)，利用(1.4)和(1.6)，我们可计算函数 $|x|^2=x\cdot x$ 的 Laplacian：

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}|x|^2 = x\cdot \mathrm{d}x = p_i\omega^i,$$

$$\mathrm{D}p_i=\mathrm{d}p_i-p_j\omega_i^j=\mathrm{d}x\cdot e_i+x\cdot \mathrm{d}e_i-p_j\omega_i^j=(\delta_{ij}+ph_{ij})\omega^j,$$

$$\frac{1}{2}\triangle|x|^2=n(1+pH_1).$$

对上式两边积分，应用 Stokes 公式，得

$$\int_M(1+pH_1)\mathrm{d}v_M=\mathrm{Vol}(M)+\int_M pH_1\mathrm{d}v_M=0, \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{Vol}(M)$ 表示 M 的体积，$\mathrm{d}v_M$ 是 M 关于诱导度量的体积元. 更一般地，我们有下面的

定理 2.1（Minkowski 积分公式） 设 $x: M\to\mathbf{E}^{n+1}$ 是紧致无边的定向超曲面，则有

$$\int_M H_{r-1}\mathrm{d}v_M+\int_M pH_r\mathrm{d}v_M=0,\qquad r=1,\cdots,n, \tag{2.3}$$

其中 $p=x\cdot\boldsymbol{n}$ 是 M 的支持函数，H_r 由(1.18)定义.

证明 当 $r=1$ 时，这就是(2.2). 以下考虑 $r>1$ 的情况. 取 $\{x;e_1,\cdots e_n,e_{n+1}=n\}$ 是沿 M 的局部 Darbous 幺正标架场，使得

$\{e_i\}$ 是主方向幺正标架，即(1.16)成立. 对于很小的参数 $t > 0$，作平行超曲面 M_t：

$$x_t = x - t\boldsymbol{n} = x - te_{n+1}, \tag{2.4}$$

其中 x_t 是 M_t 的位置向量. 设

$$\mathrm{d}x_t = \widetilde{\omega}^i e_i,$$

外微分(2.4)并利用运动方程和(1.16)，可得

$$\widetilde{\omega}^i = (1 + t\lambda_i)\omega^i, \tag{2.5}$$

上式右边 i 不作和；因而它的体积元是

$$\mathrm{d}v_{M_t} = \widetilde{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\omega}^n = W(t)\mathrm{d}v_M, \tag{2.6}$$

其中

$$W(t) := \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_r t^r. \tag{2.7}$$

因此 M_t 与 M 有相同的单位法向量 $\boldsymbol{n} = e_{n+1}$，故从(1.6)得

$$\mathrm{d}e_{n+1} = \widetilde{\omega}_{n+1}^i e_i = \omega_{n+1}^i e_i.$$

所以，结合(2.5)，有

$$-\widetilde{h}_{ij}\widetilde{\omega}^j = \widetilde{\omega}_{n+1}^i = \omega_{n+1}^i = -\lambda_i\delta_{ij}\omega^j,$$

即

$$\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{h}_{ii} = \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i}.$$

这样，M_t 的平均曲率是

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_1 = \frac{1}{n}\sum_i \widetilde{\lambda}_i = \frac{1}{n}\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{1}{nW(t)}\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}H_r t^{r-1}, \tag{2.8}$$

其中 $W'(t)$ 表示 $W(t)$ 关于 t 的导数. 把公式(2.2)应用于 M_t，利用(2.6)，(2.7)和(2.8)，得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M_t}(1 + \widetilde{H}x_t \cdot e_{n+1})\mathrm{d}v_{M_t} \\ &= \int_M \left\{1 + \frac{W'(t)}{nW(t)}(x - te_{n+1}) \cdot e_{n+1}\right\}W(t)\mathrm{d}v_M \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M \{W(t) + \frac{1}{n}W'(t)p - \frac{t}{n}W'(t)\}\mathrm{d}v_M \\
&= \frac{1}{n}\int_M \{n(1 + pH_1) + \sum_{r=1}^{n}(n-r)\binom{n}{r}H_r t^r \\
&\quad + \sum_{r=1}^{n}(r+1)\binom{n}{r+1}H_{r+1}pt^r\}\mathrm{d}v_M \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\int_M \{(n-r)\binom{n}{r}H_r \\
&\quad + \sum_{r=1}^{n}(r+1)\binom{n}{r+1}H_{r+1}p\}\mathrm{d}v_m t^r. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

上式右边是关于 t 的多项式，由于 t 的任意性，注意到 $(n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$，故(2.9) 意味着(2.3)，证毕.

定理 2.1 是第三章中定理 3.6 的高维推广.

2.2 紧致凸超曲面

若超曲面 M 的第二基本形式处处正(或负)定，则称 M 是**凸的**. 类似于第三章 §3.1 的讨论，不难证明，紧致凸超曲面 M 总是位于其中每点的切超平面的一侧，即以切点为坐标原点时 M 的支持函数 p 不变号. 现在应用定理 2.2，我们可把第三章 §2 中的 Liebmann 定理推广如下：

定理 2.2 设 $x: M \to \mathbf{E}^{n+1}$ 是紧致无边的定向凸超曲面，若有一个 $H_r = \text{const.}$，则 M 是全脐的，即所有主曲率均相等，从而 M 是一个超球面.

证明 设 $r = 1, H_1 = \text{const.}$，把(2.2) 乘 H_1 然后减去(2.3)(其中取 $r = 2$)，则得

$$\int_M p(H_1^2 - H_2)\mathrm{d}v_M = 0. \qquad (2.10)$$

利用(1.6)，我们有

$$H_1^2 - H_2 = \frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant 0.$$

由于 M 是凸的，可选取坐标原点使 $p \geqslant 0$. 于是，从(2.10) 可见

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n,$$

即 M 是全脐的，从而 M 是一个超球面.

现设 $r > 1$, $H_r = \text{const.}$，把(2.2) 乘 H_r 然后减去(2.3)，则得

$$\int_M p(H_1 H_r - H_{r+1})\mathrm{d}v_M = 0. \tag{2.11}$$

利用(1.6)，我们有

$$H_1 H_r - H_{r+1} = \frac{r!(n-r-1)!}{nn!}\sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2})^2\lambda_{i_3}\cdots\lambda_{i_{r+1}}. \tag{2.12}$$

由于 M 是凸的，故诸 λ_i 非零同号，并可选取坐标原点使 p 不变号. 这样，从(2.11) 和(2.12) 可得 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$，即 M 是全脐的，从而 M 是一个超面球. 证毕.

类似于第三章的 §3 ～ §4，对于 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的紧致凸超曲面，也有类似的刚性定理. 有兴趣的读者，可参考陈省身，熊全治等的文章(Chern SS. Formulas for hypersurfaces in Euclidean space and their applications to uniqueness theorems. J Math Mech, 8(1959):947 ～ 956;Chern SS, Hano J and Hsiung CC. A uniqueness theorem on closed convex hypersurfaces in Euclidean space. J Math Mech, 9(1960):85 ～ 88).

§3 球面的刚性定理

3.1 非负 Ricci 曲率的紧致超曲面

设 M 是 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的紧致无边的定向超曲面.

如上面所述,取$\{x;e_1,\cdots e_n,e_{n+1}=\boldsymbol{n}\}$是沿$M$的局部Darbous幺正标架场,其中$\boldsymbol{n}$是曲面上整体定义的单位法向量场.我们来计算$M$的第二基本形式模长平方$S$(见(1.13))的Laplacian.由(1.13),易得

$$\frac{1}{2}\triangle S=\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2+\sum_{i,j}h_{ij}\triangle h_{ij},\tag{3.1}$$

其中h_{ijk}由(1.14)定义.再定义h_{ijkl}如下:

$$\mathrm{D}h_{ijk}=\mathrm{d}h_{ijk}-h_{ljk}\omega_i^l-h_{ilk}\omega_j^l-h_{ijl}\omega_k^l:=h_{ijkl}\omega^l.\tag{3.3}$$

对(1.14)两边外微分,利用(1.14)和结构方程(1.8),可得

$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum_m h_{im}R_{mjkl}+\sum_m h_{mj}R_{mikl}.\tag{3.4}$$

利用(1.15)和(3.4),我们就有

$$\triangle h_{ij}=\sum_k h_{ijkk}=\sum_k h_{kijk}=\sum_k h_{kikj}+\sum_{k,m}h_{km}R_{mijk}+\sum_{k,m}h_{mi}R_{mkjk}.\tag{3.5}$$

从(3.1)和(3.5)即得

$$\frac{1}{2}\triangle S=\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2+\sum_{i,j}h_{ij}(nH_{ij}+\sum_{k,l}h_{kl}R_{lijk}+\sum_{k,l}h_{il}R_{lkjk}),\tag{3.6}$$

其中H就是M的(第一)平均曲率,H_{ij}表示H的二阶共变导数.

定理 3.1 设$x:M\to\mathbf{E}^{n+1}$是紧致无边的定向连通超曲面,若$H=\text{const.}$且Ricci曲率非负,则M是全脐的,即所有主曲率均相等,从而M是一个超球面.

证明 取局部幺正标架场$\{e_i\}$使得(1.16)成立.由于$H=\text{const.}$,则(3.6)化为

$$\frac{1}{2}\triangle S=\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}.\tag{3.7}$$

由积分公式(2.2)可知,常数$H=H_1\neq 0$.设$x\in M$是任一点.由(1.12)有

$$nH\lambda_i = \lambda_i^2 + R_{ii} \geqslant 0.$$

这表明所有$\{\lambda_i\}$有相同的符号(包括为0). 根据Gauss方程(1.9), 从而在点x有

$$R_{ijij} = \lambda_i\lambda_j \geqslant 0.$$

因为点x是任意的,所以上式在M上处处成立,即M具有非负截面曲率.

对(3.7)两边在M上积分,应用Stokes定理,则左边为零. 由于(3.7)右边被积函数非负,故得

$$h_{ijk} = 0.$$

代入(1.14),得

$$dh_{ij} - h_{kj}\omega_i^k - h_{ik}\omega_j^k = 0.$$

在上式中令$i = j$,利用(1.16),可见

$$d\lambda^i = 0,$$

即所有$\{\lambda^i\}$均为常数. 另一方面,如同第三章,§2,引理2.2一样,M上至少有一点使所有$\{\lambda^i\}$均为正(或负). 因此,所有$\{\lambda^i\}$均为正(或负)常数,即M是凸的. 定理3.1可由定理2.2直接推得. 证毕.

3.2 常数数量曲率的紧致超曲面

以下,我们用第二平均曲率H_2代替第一平均曲率$H_1 = H$. 根据(1.19),这等价于考虑数量曲率R.

定理3.2 设$x : M \to \mathbf{E}^{n+1}$是紧致无边的定向连通超曲面,若$M$具有常数数量曲率和非负Ricci曲率,则$M$是全脐的,即所有主曲率均相等,从而$M$是一个超球面.

证明 首先,正如第三章引理2.2一样,M上至少有一点使所有主曲率同号. 因此,在定理假设下,M具有正常数数量曲率:$R = \text{const.} > 0$.

取局部幺正标架场$\{e_i\}$使得(1.16)成立. 于是,M的Gauss方程为

$$R_{ijij} = \lambda_i \lambda_j \quad (i \neq j). \tag{3.8}$$

根据(1.13)和(1.16),(3.6)可改写为

$$\frac{1}{2}\triangle(n^2H^2) = \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}. \tag{3.9}$$

根据本章文献[ChY],下面定义的微分算子 $\square$ 是自共轭的;

$$\square f := \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij},$$

即对于任何函数 $f, g \in C^2(M)$ 有

$$\int_M g\square f \mathrm{d}v_M = \int_M f\square g \mathrm{d}v_M.$$

由此,

$$\square(nH) = n^2H\triangle H - n\sum_i \lambda_i H_{ii}$$

$$= \frac{1}{2}\triangle(n^2H^2) - n^2|\nabla H|^2 - n\sum_i \lambda_i H_{ii}.$$

因此,(3.9)可改写为

$$\square(nH) = \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}. \tag{3.10}$$

对(3.10)两边在 M 上积分,得

$$\int_M \{\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}\}\mathrm{d}v_M = 0. \tag{3.11}$$

设 $x \in M$ 是任一点. 若 $H(x) = 0$,则由(1.13),$R = -S \leqslant 0$;这与 $R > 0$ 矛盾. 因此,$H(x) \neq 0$,从而 $S(x) > 0$. 由(1.12)有

$$nH\lambda_i = \lambda_i^2 + R_{ii} \geqslant 0.$$

这表明所有 $\{\lambda_i\}$ 有相同的符号(包括为 0),从而在点 x 有

$$R_{ijij} = \lambda_i \lambda_j \geqslant 0.$$

因为点 x 是任意的，所以上式在 M 上处处成立，即 M 具有非负截面曲率，而且 $S>0$.

对(1.13)两边微分，注意到 R 是常数，有

$$n^2HH_k-\sum_{i,j}h_{ij}h_{ijk}=0.$$

由此得

$$\sum_k(\sum_{i,j}h_{ij}h_{ijk})^2=n^4H^2\sum_k(H_k)^2=n^4H^2|\nabla H|^2. \quad (3.12)$$

对于任何确定的 k，我们有下列 Schwarz 不等式

$$(\sum_{i,j}h_{ij}h_{ijk})^2\leqslant S\sum_{i,j}(h_{ijk})^2. \quad (3.13)$$

利用(3.13)，(3.12)可化为

$$\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2\geqslant\frac{n^4H^2}{S}|\nabla H|^2. \quad (3.14)$$

由(3.13)和(3.14)可见

$$\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2-n^2|\nabla H|^2\geqslant\frac{R}{S}n^2|\nabla H|^2.$$

把上式引入(3.11)，便得

$$\int_M\{\frac{R}{S}n^2|\nabla H|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}\}\mathrm{d}v\leqslant 0. \quad (3.15)$$

但上式左边的被积函数是非负的，故从(3.15)可得

$$\frac{R}{S}n^2|\nabla H|^2=0.$$

由于 R 是正常数，故得 $|\nabla H|^2=0$，即 H 是常数，再根据定理3.1，便得证明. 证毕.

定理 3.3 设 $x:M\to\mathbf{E}^{n+1}$ 是 n 维紧致无边的定向连通超曲面，若 $H_n=\text{const.}$，即 M 的 Gauss-Kronecker 曲率为常数，则 M 是全脐的，即所有主曲率均相等，从而 M 是一个超球面.

证明 由于 M 是紧致的，正如上面所述，M 上至少有一点使所有主曲率同号，不妨设都为正. 因此，在定理假设下，M 具有正

常数 Gauss-Kronecker 曲率 H_n. 又由于主曲率函数的连续性，根据 H_n 的定义(1.18)，可见 M 的所有主曲率处处为正，因此，由 Gauss 方程，M 的截面曲率处处为正，即 M 是凸的. 再由定理 2.2，便直接得证. 证毕.

注 这些定理都可看作经典的 Liebmann 定理的高维推广. 尤其是，S. Montiel 和 A. Ros 已证得：设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中 n 维紧致无边的连通嵌入超曲面. 若有一个 $H_r = \text{const.}$，则 M 是全脐的，从而是一个超球面(Montiel S and Ros A. Compact hypersurfaces: The Alexandrow theorem for high order mean curvature, in"Differential Geometry"(ed. Lawson B and Tenenblat K), Pitman monographs and surveys in pure appl. math., No 52, Longman Sci. and Tech., 1991: 279 ~ 296).

记矩阵 $\boldsymbol{A} = (h_{ij})$，令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - H\boldsymbol{I}, \qquad \mathrm{tr}\boldsymbol{B} = 0, \tag{3.16}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵. 一个简单计算得

$$\mu^2 := \mathrm{tr}\boldsymbol{B}^2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 - nH^2 = S - nH^2 \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \tag{3.17}$$

其中 $\mu = 0$ 当且仅当所有主曲率相等，即 M 是全脐的.

现在我们把 Gauss 方程(1.9)代入(3.6)，利用(3.16)和(3.17)，得

$$\frac{1}{2}\triangle S = \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - \mu^2(\mu^2 - nH^2) + nH(\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^3). \tag{3.18}$$

引理 3.4 对于 n 阶对称无迹矩阵 $\boldsymbol{B}$，有

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\mu^3 \leqslant \mathrm{tr}\boldsymbol{B}^3 \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\mu^3, \tag{3.19}$$

其中等号成立当且仅当矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 $n-1$ 个相等的特征根.

证明 用 Lagrange 乘数法，求 $\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^3$ 在条件 $\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^2 = \mu^2$ 下的极值，即可得证. 证毕.

定理 3.5 设 $x: M\to\mathbf{E}^{n+1}$ 是具有常数平均曲率 H 的 $n(>2)$ 维紧致无边的定向连通超曲面，若 $S\leqslant\frac{n^2H^2}{n-1}$，则 M 是全脐的，从而 M 是一个超球面.

证明 不失一般性，可设 $H>0$. 把(3.19)应用于(3.18)，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S &\geqslant \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2-\mu^2\left(\mu^2+\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H\mu-nH^2\right)\\ &=\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2-\mu^2\left(\mu-\frac{nH}{\sqrt{n(n-1)}}\right)(\mu+\sqrt{n(n-1)}H).\end{aligned}\tag{3.20}$$

因此，当 $S\leqslant\frac{n^2H^2}{n-1}$ 时，$\mu-\frac{nH}{\sqrt{n(n-1)}}\leqslant 0$，从而(3.20)的右边非负. 对(3.20)两边积分，应用 Stokes 公式，便得 $h_{ijk}=0$，即所有主曲率均为常数. 由于 M 是紧致的，M 上至少有一点使所有主曲率同号，从而所有主曲率均为常数. 由 Gauss 方程，M 的截面曲率处处为正，即 M 是凸的. 再由定理 2.2，便得证明. 证毕.

§4 极小超曲面的 Bernstein 型定理

平均曲率恒为零的超曲面称为极小超曲面. 积分公式(2.2)表明：欧氏空间 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中不存在紧致无边的极小超曲面. 本节考虑 $\mathbf{E}^{n+1}$ 的完备极小超曲面，通过曲率估计，给出某些 Bernstein 型定理.

4.1 关于第二基本形式的一个估计

设 $x: M\to\mathbf{E}^{n+1}$ 是 $n(\geqslant 2)$ 维极小超曲面浸入. 取 $\{x;e_1,\cdots,e_1,e_{n+1}=\boldsymbol{n}\}$ 是沿 M 的局部 Darbous 幺正标架场，其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面上整体定义的单位法向量场.

令

$$A := h_{ij}\omega^i\omega^j, \quad |A|^2 := u^2 = \sum_{i,j}(h_{ij})^2, \quad u := |A|.$$

由于极小性：$nH = \sum h_{ii} = 0$，公式(1.13)等化为

$$R_{ij} = -\sum_k h_{ik}h_{jk}, \qquad R = -u^2. \tag{4.1}$$

利用(3.5)和(1.8)，易得

$$\sum_{i,j} h_{ij}\triangle h_{ij} = \sum_{i,j,k,m} h_{ij}(h_{km}R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{mi}R_{mkjk}) = -u^4. \tag{4.2}$$

于是，

$$\begin{aligned} u\triangle u + |\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\triangle u^2 &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + \sum_{ij} h_{ij}\triangle h_{ij} \\ &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - u^4. \end{aligned} \tag{4.3}$$

取局部幺正标架场$\{e_i\}$使得(1.16)成立. 根据u的定义和Schwarz不等式，我们有

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= \sum_k(\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk})^2 u^{-2} = \sum_k(\sum_i h_{ii}h_{iik})^2 u^{-2} \\ &\leqslant \sum_{i,k}(h_{iik})^2 = \sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \sum_i h_{iii}^2 \\ &= \sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \sum_i(\sum_{j\neq i} h_{jji})^2 \\ &\leqslant \sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + (n-1)\sum_{j\neq i} h_{jji}^2 = n\sum_{i\neq j} h_{jji}^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

由 Codazzi 方程(1.15)，h_{ijk}是对称的，故有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= 3\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \sum_i h_{iii}^2 + \sum_{i,j,k\neq} h_{ijk}^2 \\ &\geqslant 3\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \sum_i h_{iii}^2 \\ &= 2\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \sum_i h_{iii}^2 \\ &\geqslant \frac{2}{n}|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中最后一步的不等号是应用了(4.4). 从(4.3)和(4.5)得

$$u\triangle u + u^4 \geqslant \frac{2}{n}|\nabla u|^2. \tag{4.6}$$

4.2 稳定性不等式

对于一张极小超曲面 M，若关于一切具有紧致支集的变分，其体积的第二变分总是非负的，则 M 称为**稳定的**；否则称为**不稳定的**. 由体积的第二变分公式（参见第五章，§3），M 为稳定的充要条件是对任何具有紧致支集的光滑函数 $f: M \to R$ 有

$$\int_M u^2 f^2 \mathrm{d}v_M \leqslant \int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M. \tag{4.7}$$

可以证明，欧氏空间 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的极小图 $x^{n+1} = F(x^1, \cdots, x^n)$ 是稳定的（参见下面 §5.1）.

对于任何 $q \geqslant 0$，用 $u^{1+q}f$ 代替(4.7)中的 f，则得

$$\int_M u^{4+2q} f^2 \mathrm{d}v_M \leqslant (1+q)^2 \int_M u^{2q} |\nabla u|^2 f^2 \mathrm{d}v_M +$$

$$2(1+q)\int_M u^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla u\rangle \mathrm{d}v_M + \int_M u^{2q+2}|\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M. \tag{4.8}$$

另一方面，用 $u^{2q}f^2$ 乘(4.6)并在 M 上积分，得

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}\int_M u^{2q} f^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}v_M &\leqslant \int_M (u^{4+2q} f^2 + u^{2q+1} f^2 \triangle u)\mathrm{d}v_M \\
&= \int_M u^{4+2q} f^2 \mathrm{d}v_M - \int_M \langle \nabla (u^{2q+1} f^2), \nabla u\rangle \mathrm{d}v_M \\
&= \int_M u^{4+2q} f^2 \mathrm{d}v_M - 2\int_M u^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla u\rangle \mathrm{d}v_M \\
&\quad - (2q+1)\int_M u^{2q} f^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}v_M.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\left(\frac{2}{n} + 2q + 1\right)\int_M u^{2q} f^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}v_M$$

$$\leqslant \int_M u^{4+2q} f^2 \mathrm{d}v_M - 2\int_M u^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla u\rangle \mathrm{d}v_M, \tag{4.9}$$

其中我们应用了下面的公式

$$\mathrm{div}(u^{1+2q}f^2\nabla u)$$
$$= u^{1+2q}f^2\triangle u + 2u^{1+2q}f\langle\nabla u,\nabla f\rangle + (1+2q)u^{2q}f^2|\nabla u|^2.$$

(4.9) 两边乘 $(1+q)$，再与 (4.8) 相加，得

$$(1+q)\left(\frac{2}{n}+2q\right)\int_M u^{2q}f^2|\nabla u|^2 dv_M$$
$$\leqslant q\int_M u^{4+2q}f^2 dv_M + \int_M u^{2+2q}|\nabla f|^2 dv_M. \tag{4.10}$$

另一方面，对于任意的 $\varepsilon > 0$，我们有不等式

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2.$$

令 $a = u^q|\nabla u||f|$，$b = u^{q+1}|\nabla f|$，对于 (4.8) 中右边的中间项利用上述不等式以及下列不等式

$$f\langle\nabla f,\nabla u\rangle \leqslant |f||\nabla u||\nabla f|,$$

可得

$$\int_M u^{4+2q}f^2 dv_M \leqslant (1+q)(1+q+\varepsilon)\int_M u^{2q}|\nabla u|^2 f^2 dv_M$$
$$+\left(1+\frac{1+q}{\varepsilon}\right)\int_M u^{2+2q}|\nabla f|^2 dv_M. \tag{4.11}$$

将 (4.10) 代入 (4.11)，我们有

$$\int_M u^{4+2q}f^2 dv_M \leqslant \frac{q(1+q+\varepsilon)}{q+\frac{2}{n}}\int_M u^{4+2q}f^2 dv_M$$
$$+\beta_1\int_M u^{2+2q}|\nabla f|^2 dv_M.$$

其中 β_1 是仅与 n,ε,q 有关的常数. 当我们取 $q<\sqrt{\frac{2}{n}}$ 时，有 $\frac{q(1+q)}{q+\frac{2}{n}}\leqslant 1$，因此可以取充分小的 ε，使得 $\frac{q(1+q+\varepsilon)}{q+\frac{2}{n}}\leqslant 1$. 由此，对于 $q<\sqrt{\frac{2}{n}}$，有

$$\int_M u^{4+2q} f^2 \mathrm{d}v_M \leqslant \beta_2 \int_M u^{2+2q} |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M. \tag{4.12}$$

其中 β_2 也是仅与 n,ε,q 有关的常数.

另一方面，将(4.8)、(4.9) 相加，利用与得(4.11) 相同的方法，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{(1+\varepsilon)n}\int_M u^{2q} f^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}v_M \\ &\leqslant (1+\varepsilon)q^2 \int_M u^{2q} f^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}v_M + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_M u^{2+2q} |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M.\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{(1+\varepsilon)n} - (1+\varepsilon)q^2\right)\int_M u^{2q} f^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}v_M \\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_M u^{2+2q} |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M.\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3 Bernstein 定理的推广

定理 4.1([DP]) 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中完备的稳定极小超曲面，若

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{B_r} |R| \mathrm{d}v_M}{r^{2+2q}} = 0, \quad q < \sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$B_r = \{p \in M | \rho(P,P_0) \leqslant r\}$$

其中 ρ 是 M 中任一点 P 到固定点 P_0 的测地距离，则 M 是超平面.

推论 4.2 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中完备的稳定极小超曲面，若 $\int_M S \mathrm{d}v_M < \infty$，则 M 是超平面.

证明 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 以及 $1 < s,t < \infty$，满足 $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$，我们有 Young 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon^s \frac{a^s}{s} + \varepsilon^{-t} \frac{b^t}{t}. \tag{4.14}$$

设 p，$0 < p < 2 + 2q$，是一待定数，由(4.14)，我们有

$$u^{2+2q}|\nabla f|^2 = f^2\left(u^{2+2q}\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\right) = f^2 u^{2+2q-p} u^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2}$$

$$\leqslant f^2\left(\frac{\varepsilon^s}{s}u^{s(2+2q-p)} + \frac{\varepsilon^{-t}}{t}\left(u^p\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\right)^t\right).$$

现选取 p 满足下列方程：

$$s(2+2q-p) = 4+2q, \quad pt = 2, \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{t} = 1.$$

解得 $p=\dfrac{2}{1+q}, t=1+q, s=\dfrac{1+q}{q}$. 由此，当取 ε 充分小时，我们可得

$$\int_M u^{4+2q} f^{2+2q} \mathrm{d}v_M \leqslant \beta_3 \int_M u^2 |\nabla f|^{2+2q} \mathrm{d}v_M. \tag{4.15}$$

固定一点 $P_0 \in M$，选取 M 中一族子集 B_r，

$$B_r = \{P \in M \mid \rho(P,P_0) = \rho(P) \leqslant r\}.$$

由 M 的完备性，B_r 是紧致的且

$$M = \bigcup_{r\in(0,\infty)} B_r.$$

众所周知，在 M 上几乎处处有 $|\nabla\rho| \leqslant 1$，现固定 r 与 θ，$0<\theta<1$，且(4.15)中的 f 取为

$$f(P) = \begin{cases} 1, & \rho(P) \leqslant \theta r; \\ \dfrac{r-\rho(P)}{(1-\theta)r}, & \theta r \leqslant \rho(P) \leqslant r;, \\ 0, & \rho(P) \geqslant r. \end{cases}$$

则由(4.15)，我们有

$$\int_{B_{\theta r}} u^{4+2q} \mathrm{d}v_M \leqslant \beta_3 \frac{\int_{B_r} u^2 \mathrm{d}v_M}{(1-\theta)^{2+2q} r^{2+2q}}$$

$$\leqslant \beta_3 \frac{\int_{B_r} |R| \mathrm{d}v_M}{(1-\theta)^{2+2q} r^{2+2q}}, q < \sqrt{\frac{2}{n}}. \tag{4.16}$$

令 $r\to\infty$，由假设条件，我们有 $\int_M u^{4+2q}\mathrm{d}v_M = 0$，这意味着 $u=0$，也

即 M 为超平面. 证毕.

对于欧氏空间 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的完备极小图 $x^{n+1}=F(x^1,\cdots,x^n)$(即函数 F 定义在整个 $\mathbf{R}^n$ 上),M. Miranda([Mi]) 证明了:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{B_r}|R|\mathrm{d}v_M}{r^{n-2}}<\infty.$$

因为当 $2\leqslant n\leqslant 5$ 时,有 $2+2q>3$,所以根据定理 4.1 即得

推论 4.3 $\mathbf{E}^{n+1}(n\leqslant 5)$ 中完备的极小图必为超平面.

注 Schoen-Simon-Yua([SSY]) 最早给出了用曲率估计方法证明这个结果;后来 L. Simon([LS]) 又作了关于 Bernstein 定理的高维推广. 1967 年 J. Simons([Si]) 用几何测度论方法证明了 $\mathbf{E}^{n+1}(n\leqslant 7)$ 中完备的极小图必为超平面. 令人惊奇的是,当 $n\geqslant 8$ 时, 这样的结论不能成立. 这是由 Bombieri-de Giorgi-Giusti([BGG]) 在 1969 年得到的.

另一方面,根据文献[An1] 的定义,积分 $\int_M|A|^n\mathrm{d}v_M=\int_M u^n\mathrm{d}v_M$ 称为欧氏空间中 n 维极小子流形 M 的全数量曲率,它与 M 的拓扑和指标有密切关系([Ty]). 当

$$\int_M|A|^n\mathrm{d}v_M<+\infty \tag{4.17}$$

时,我们称 M 具有有限全数量曲率.

定理 4.4([SZ1]) $\mathbf{E}^{n+1}$ 中具有有限全数量曲率的定向完备稳定极小超曲面 M 必是超平面.

为了证明这个定理,先引述下面的引理,它们的详细证明可参考[SZ1] 的定理 2.3 和 3.3.

引理 4.5 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中具有有限全数量曲率的定向完备的极小超曲面. 令 $\{r_i\}$ 是一正实数列,满足 $r_i\to+\infty$(当 $i\to\infty$). 设 $\widetilde{M}_i$ 为

$$\widetilde{M}_i = \frac{1}{r_i}M = \{\frac{1}{r_i}P \mid P \in M \subset \mathbf{R}^{n+1}\}.$$

那么，对于任何实数 $0 < a_1 < a_2$，存在递减的正函数列$\{\varepsilon(r)\}$，使得

$$|\widetilde{A}_i|(\widetilde{x}_i) \leqslant \varepsilon(r_i), \qquad \lim_{r \to +\infty} \varepsilon(r) = 0,$$

其中$\widetilde{x}_i \in \widetilde{M}_i \cap BT(0, a_1, a_2)$（见§5，命题5.5的上面），$\widetilde{A}_i$表示$\widetilde{M}_i$的第二基本形式.

引理 4.6 设M是$\mathbf{E}^{n+1}(n \geqslant 3)$中具有有限全数量曲率的定向完备的极小超曲面，那么，对于任何正实数列$\{r_i\}(\to +\infty)$，序列$\{\widetilde{M}_i = \frac{1}{r_i}M\}$在Cheeger-Gromov意义下光滑地收敛到一平坦的开黎曼流形M_∞，且可在M_∞上附加一点O使得$\overline{M}_\infty = M_\infty \cup \{O\}$成为一个完备度量空间. 进而，$\overline{M}_\infty$等距于若干过$\mathbf{E}^{n+1}$原点$O$的超平面的并，$O$是$\overline{M}_\infty$上仅有的奇点.

定理 4.4 证明概要 对于n＝2，已被M. do Carmo-彭家贵(Bull. Amer. Math. Soc.，1(1979)，903～905)以及Fisher-Colbrie-R. Schoen(Comm. Pure Appl. Math.，33(1980)，199～211)分别独立证得(这时不需要有限全数量曲率的假设). 因此，以下设$n \geqslant 3$.

用$B(r)$表示$\mathbf{E}^{n+1}$中半径为r的球，$\partial B(r)$表示它的边界. 根据引理4.5和4.6，对于任何正实数列$\{r_i\}(\to +\infty)$，序列$\{\widetilde{M}_i = \frac{1}{r_i}M\}$（若有必要，可取其子序列）光滑地收敛于$\mathbf{E}^{n+1}$中若干超平面的并. 若其中某个超平面Π的重数大于1，则对于充分大的i，$\widetilde{M}_i \cap \partial B(1)$的某一分支将是赤道球面$\Pi \cap \partial B(1)$的非平凡覆盖. 但这是不可能的，因为总可以假定球面的维数至少是2(参考[Ty]，p. 434)，所以，这些超平面都具有重数1.

因为M的全数量曲率有限，根据文献[Ty]，M具有有限多个

端(end),且每个端都收敛到唯一的一个重数为 1 的超平面. 这就意味着,在 M 的某个紧致集外边,M 的每个端都是无穷远切空间上具有有界斜率的图. 根据[Sc] 的命题 3,存在一致常数 C,使得对于任何 $P \in M \cap \partial B(r)$(当 $r \to +\infty$),有估计

$$|A|(P) \leqslant C/r^n. \tag{4.18}$$

此外,由[An] 的定理 4.1,存在一致常数 C',使得

$$\mathrm{Vol}(M \cap B(r)) \leqslant C' r^n. \tag{4.19}$$

因此,利用(4.18) 和(4.19),我们有

$$\begin{aligned}\int_M |A|^2 \mathrm{d}v_M &= \lim_{r \to +\infty} \int_{M \cap B(r)} |A|^2 \mathrm{d}v_M \\ &\leqslant C_1 + \lim_{r \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{[r]+1} \int_{M \cap (\overline{B(k+1)} \setminus B(k))} |A|^2 \mathrm{d}v_M \right) \\ &\leqslant C_1 + \lim_{r \to +\infty} C_2 \left(\sum_{k=1}^{[r]+1} \frac{(k+1)^n}{k^{2n}} \right) < +\infty.\end{aligned} \tag{4.20}$$

再根据定理 4.1,就得定理 4.4.

把定理 4.4 与文献[Ty] 的结果结合起来,便有

推论 4.7　设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}(n \leqslant 6)$ 中定向完备的稳定极小超曲面. 若 M 的体积增长满足

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\mathrm{Vol}(M \cap B(r))}{r^n} < +\infty,$$

其中 $B(r)$ 表示 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中半径为 r 的球体,则 M 必是超平面.

4.4　定理 4.4 的另一证明

这个证明基于下列一些引理.

引理 4.8([An1])　设 M 是 E^{n+1} 中具有有限全数量曲率的定向完备的极小超曲面,若 M 只有一个端,则 M 是超平面.

设 E 是完备黎曼流形 M 的一个端. 若 E 上存在满足 Neumann 边界条件的正 Green 函数,则 E 称为非抛物端(见[LT]).

引理 4.9([CSZ])　设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}(n \geqslant 3)$ 中的定向完备极小

超曲面，那么，M 的每个端都是非抛物端.

引理 4.10([LT]) 设 M 是完备黎曼流形，用 $H^0(M)$ 表示 M 上能量有限的有界调和函数的空间，那么，M 的非抛物端的个数不大于空间 $H^0(M)$ 的维数.

根据这些引理，我们只要证明下列命题.

命题 4.11 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中具有有限全数量曲率的定向完备稳定极小超曲面，则 M 上不存在非常数的能量有限的有界调和函数.

证明 用反证法. 设 F 是 M 上非常数的能量有限的有界调和函数. 这就意味着

$$\triangle F = 0, \quad \int_M |\nabla F|^2 \mathrm{d}v_M = \int_M |\mathrm{d}F|^2 \mathrm{d}v_M < \infty.$$

取 $\{x; e_1, \cdots, e_n, e_{n+1} = \boldsymbol{n}\}$ 是沿 M 的局部 Darbous 幺正标架场，由 (1.10) 有

$$|\mathrm{d}F|^2 = \sum_i (F_i)^2, \quad \triangle F = \sum_i F_{ii},$$

其中 F_i 和 F_{ij} 由下式定义：

$$F_i \omega^i = \mathrm{d}F, \quad F_{ij}\omega^j = \mathrm{d}F_i - F_j \omega_i^j. \tag{4.21}$$

对(4.21) 的第一式两边外微分，应用(1.8) 和(4.21)，得

$$F_{ij}\omega^i \wedge \omega^j = 0, \quad F_{ij} = F_{ji}. \tag{4.22}$$

定义 F_{ijk} 如下：

$$F_{ijk}\omega^k = \mathrm{d}F_{ij} - F_{kj}\omega_i^k - F_{ik}\omega_j^k.$$

对(4.21) 的第二式两边外微分，应用(1.8)，(4.21) 和(4.22)，可得

$$F_{ijk} - F_{ikj} = \sum_l F_l R_{lijk}. \tag{4.23}$$

因此，我们有

$$\frac{1}{2}\triangle|\mathrm{d}F|^2=\sum_{i,j}F_{ij}^2+\sum_{i,j}F_jF_{jij}=\sum_{i,j}F_{ij}^2+\sum_{i,j}F_iF_jR_{ij},\tag{4.24}$$

其中 $R_{ij}=\sum_k R_{ikjk}$,并应用了 F 的调和性 $\triangle F=\sum_i F_{ii}=0$.

取局部幺正标架场$\{e_i\}$使得(1.16)成立.由(1.12)及极小性 $\sum_i\lambda_i=0$,可见对任何 j 有

$$\begin{aligned}R_{jj}&=-\lambda_j^2=-\frac{n-1}{n}\lambda_j^2-\frac{1}{n}\lambda_j^2\\&=-\frac{n-1}{n}\lambda_j^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i\neq j}\lambda_i\Big)^2\\&\geqslant-\frac{n-1}{n}\lambda_j^2-\frac{n-1}{n}\sum_{i\neq j}\lambda_i^2\\&=-\frac{n-1}{n}\sum_i\lambda_i^2=-\frac{n-1}{n}|A|^2.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{ij}R_{ij}F_iF_j\geqslant-\frac{n-1}{n}|A|^2|\mathrm{d}F|^2.$$

这样,(4.24)化为

$$\frac{1}{2}\triangle|\mathrm{d}F|^2\geqslant\sum_{ij}F_{ij}^2-\frac{n-1}{n}|A|^2|\mathrm{d}F|^2.\tag{4.25}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|\nabla|\mathrm{d}F||^2&=|\mathrm{d}F|^{-2}\sum_j\Big(\sum_iF_iF_{ij}\Big)^2\\&\leqslant|\mathrm{d}F|^{-2}\Big(\sum_iF_i^2\Big)\Big(\sum_{ij}F_{ij}^2\Big)=\sum_{ij}F_{ij}^2.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle|\mathrm{d}F|^2&=|\mathrm{d}F|\triangle|\mathrm{d}F|+|\nabla|\mathrm{d}F||^2\\&\leqslant|\mathrm{d}F|\triangle|\mathrm{d}F|+\sum_{ij}F_{ij}^2.\end{aligned}$$

从它与(4.25)就得

$$|\mathrm{d}F|\triangle|\mathrm{d}F| + \frac{n-1}{n}|A|^2|\mathrm{d}F|^2 \geqslant 0. \qquad (4.26)$$

固定一点 $x\in M$，用 $B_x(r)$ 表示 M 上中心在 x 半径为 r 的测地球. 我们选取截断函数 ψ 如下

$$\psi = \begin{cases} 1, & \forall \quad B_x(r/2); \\ 0, & \forall \quad M\backslash B_x(r); \\ |\mathrm{d}\psi| \leqslant c/r, & (c = \text{const.}). \end{cases}$$

在(4.7) 中取 $f=\psi|\mathrm{d}F|$，利用(4.26) 和 Stokes 公式，我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_M \{|\nabla(\psi|\mathrm{d}F|)|^2 - |A|^2\psi^2|\mathrm{d}F|^2\}\mathrm{d}v_M \\
&= \int_M \{-\psi|\mathrm{d}F|\triangle(\psi|\mathrm{d}F|) - |A|^2\psi^2|\mathrm{d}F|^2\}\mathrm{d}v_M \\
&= -\int_M \psi^2|\mathrm{d}F|\{\triangle|\mathrm{d}F| + \frac{n-1}{n}|A|^2|\mathrm{d}F|\}\mathrm{d}v_M \\
&\quad - \frac{1}{n}\int_M \psi^2|A|^2|\mathrm{d}F|^2\mathrm{d}v_M \\
&\quad - 2\int_M \psi|\mathrm{d}F\langle|\nabla|\mathrm{d}F|,\nabla\psi\rangle\mathrm{d}v_M - \int_M |\mathrm{d}F|^2\psi\triangle\psi\mathrm{d}v_M \\
&\leqslant -\frac{1}{n}\int_M \psi^2|\mathrm{d}F|^2|A|^2\mathrm{d}v_M - \frac{1}{2}\int_M \langle\nabla|\mathrm{d}F|^2,\nabla\psi^2\rangle\mathrm{d}v_M \\
&\quad - \int_M |\mathrm{d}F|^2\psi\triangle\psi\mathrm{d}v_M \\
&= -\frac{1}{n}\int_M \psi^2|\mathrm{d}F|^2|A|^2\mathrm{d}v_M + \frac{1}{2}\int_M |\mathrm{d}F|^2\triangle(\psi^2)\mathrm{d}v_M \\
&\quad - \int_M |\mathrm{d}F|^2\psi\triangle\psi\mathrm{d}v_M \\
&= -\frac{1}{n}\int_M \psi^2|\mathrm{d}F|^2|A|^2\mathrm{d}v_M + \int_M |\mathrm{d}F|^2|\nabla\psi|^2\mathrm{d}v_M \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_{B_x(r/2)} |\mathrm{d}F|^2|A|^2\mathrm{d}v_M + \frac{c^2}{r^2}\int_{B_x(r)} |\mathrm{d}F|^2\mathrm{d}v_M.
\end{aligned}$$

令 $r\to\infty$，既然 F 的能量有限，则上式意味着在 M 上有 $|\mathrm{d}F||A|=0$. 既然 F 不是常数，则 $|A|=0$，即 M 是全测地的 $\mathbf{E}^n$. 这与 $\mathbf{E}^n$ 上不存在非常数的有界调和函数([Ya]) 矛盾. 证毕.

§ 5 常平均曲率的完备超曲面

5.1 常平均曲率图

设 M 是 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中具有常平均曲率的定向超曲面. 若对于任何具有紧致支集的函数 $f: M \to \mathbf{R}$, M 的第二基本形式 A 总满足下列不等式:

$$\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M \geqslant \int_M |A|^2 f^2 \mathrm{d}v_M, \tag{5.1}$$

则 M 称为**强稳定的**. 这是稳定极小超曲面的一种推广.

设 $\{O; E_1, \cdots, E_{n+1}\}$ 是 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{E}^{n+1}$ 的固定幺正标架, 对应的点坐标为 $\{x^A\}$. 方程

$$x^{n+1} = F(x^1, \cdots, x^n) \tag{5.2}$$

确定了 $\mathbf{E}^{n+1}$ 的一张超曲面, 称为**非参数化超曲面**, 也称为**图** (**graph**).

命题 5.1 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的常平均曲率图 M 是强稳定的. 特别地, 极小图是稳定的.

证明 选取局部活动幺正标架场 $\{x; e_1, \cdots, e_{n+1}\}$, 使得 $\{e_i\}$ 与 M 相切, 而 e_{n+1} 是 M 在 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的单位法向量. 由(5.2), 令

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad W = \sqrt{1 + \sum_i p_i^2} \geqslant 1. \tag{5.3}$$

图(5.2) 的单位法向量可取为

$$e_{n+1} = \frac{1}{W}\left(\sum_i p_i E_i - E_{n+1}\right).$$

于是,

$$\mu := e_{n+1} \cdot E_{n+1} = -1/W.$$

因为 M 的平均曲率 $H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$ 是常数, 利用(1.6) 和(5.3), 容

易算得

$$\triangle\mu = -|A|^2\mu,$$

即

$$W\triangle\left(\frac{1}{W}\right) = -|A|^2, \tag{5.4}$$

设 $f: M \to \mathbf{R}$ 是具有紧致支集的函数，取 $g = fW$，则有

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{W^2}|\nabla g|^2 + 2\frac{g}{W}\left(\nabla g \cdot \nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right) + g^2\left|\nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right|^2. \tag{5.5}$$

因为

$$\operatorname{div}\left(fg\nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right) = f^2W\triangle\left(\frac{1}{W}\right) + 2\frac{g}{W}\left(\nabla g \cdot \nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right) + g^2\left|\nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right|^2,$$

所以，(5.5) 可化为

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{W^2}|\nabla g|^2 - f^2W\triangle\left(\frac{1}{W}\right) + \operatorname{div}\left(fg\nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right). \tag{5.6}$$

由(5.4)，(5.5) 和(5.6)，应用 Stokes 公式，我们就得

$$\int_M(|\nabla f|^2 - |A|^2f^2)\mathrm{d}v_M = \int_M\left(|\nabla f|^2 + f^2W\triangle\left(\frac{1}{W}\right)\right)\mathrm{d}v_M = \int_M\frac{1}{W^2}|\nabla g|^2\mathrm{d}v_M \geqslant 0.$$

这表明(5.1) 成立. 证毕.

1965 年陈省身先生得到下列结果.

定理 5.2([Chr]) $\mathbf{E}^{n+1}$ 中完备的常平均曲率图其实是极小图.

因而当 $n \leqslant 7$ 时，由 Bernstein 定理的高维推广，这样的常平均曲率图只能是超平面. 下面我们将对此作某些推广.

5.2 常平均曲率超曲面的曲率估计

现在我们考虑 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中一般的(参数化) 常平均曲率 H 超曲面 M. 根据(3.16) 和(3.17),我们有

引理 5.3 对于 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的常平均曲率超曲面 M,

$$\triangle|B|^2 \geqslant -\frac{n^2}{2(n-1)}|B|^4. \tag{5.7}$$

证明 由(3.18) 和(3.19),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle|B|^2 &= |\nabla A|^2 + |B|^2(nH^2 - |B|^2) + nH(\mathrm{tr}B^3) \\ &\geqslant -|B|^4 + nH^2|B|^2 - n|H|\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|B|^3.\end{aligned}$$

把下列不等式应用于上式右边即可得(5.7):

$$nH^2|B|^2 + \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}|B|^4 \geqslant \sqrt{n}\,|H|\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}|B|^3.$$

证毕.

引理 5.4(Sobolev 不等式) 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的常平均曲率 H 超曲面,则存在仅与 n 有关的一致常数 $C(n)$,使得对任何函数 $f \in C_0^1(M)$,下面的 Sobolev 不等式成立:

(i) $$\left(\int_M |f|^4 \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(2)\left(\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M + (|H|+1)\int_M f^2 \mathrm{d}v_M\right) \quad (\forall\ n=2);$$

(ii) $$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant C(n)\left(\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M + H^2\int_M f^2 \mathrm{d}v_M\right) (\forall\ n \geqq 3).$$

证明 根据[HS],存在仅与 n 有关的一致常数 $C_1(n)$,使得对任何函数 $f \in C_0^1(M)$,成立下列不等式:

$$\left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{n-1}{n}} < C_1(n)\left(\int_M |\nabla f| \mathrm{d}v_M + |H| \int_M |f| \mathrm{d}v_M\right).$$

当 $n=2$ 时，在上式中用 $|f|^2$ 代替 $|f|$，易得

$$\begin{aligned}\left(\int_M |f|^4 \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant C_1(2)\left(2\int_M |f|\,|\nabla f| \mathrm{d}v_M + |H| \int_M f^2 \mathrm{d}v_M\right) \\ &\leqslant C(2)\left(\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M + (1+|H|)\int_M f^2 \mathrm{d}v_M\right).\end{aligned}$$

当 $n \geqslant 3$ 时，用 $|f|^{\frac{2(n-1)}{n-2}}$ 代替 $|f|$，并利用 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant \frac{2(n-1)}{n-2} C_1(n)\Bigg\{&\left(\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ |H|\left(\int_M f^2 \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}.\end{aligned}$$

上式两边平方，即可得(ii)．证毕．

为简单计，定义下列记号

$B(r):=M$ 上半径为 r，中心在某点 $O\in M$ 的测地球；

$B_Q(r):=M$ 上半径为 r，中心在给定点 $Q\in M$ 的测地球；

$BT(r,a_1,a_2):=\overline{B(a_2-r)}\backslash B(a_1+r)$，其中 $0<a_1<a_2$，且 $0\leqslant r\leqslant (a_2-a_1)/2$．

命题 5.5 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中定向完备的常平均曲率 H 超曲面，a_1 和 a_2 是满足 $a_2\geqslant a_1$ 的两正实数．假定存在正常数 δ 使得

$$\sup_{BT(0,2a_1,a_2-a_1)} |B|^2 \geqslant \delta^2. \tag{5.8}$$

那么，存在一个仅与 n，H 和 δ 有关的一致常数 $\varepsilon_0(n,H,\delta)$，使得若

$$\int_{BT(0,a_1,a_2)} |B|^n \mathrm{d}v_M \leqslant \varepsilon_0, \tag{5.9}$$

则

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant a_1}\left\{r^2 \sup_{BT(r,a_1,a_2)} |B|^2\right\} \leqslant \varepsilon_0^{-\frac{2}{n}}\left(\int_{BT(0,a_1,a_2)} |B|^n \mathrm{d}v_M\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{5.10}$$

证明 以 $n\geqslant 3$ 的情况进行证明，$n=2$ 的情况是完全类似

的. 由于 M 定向,故不妨设 $H \geqslant 0$.

选取 $r_0 \in [0, a_1]$ 和 $Q_0 \in BT(r_0, a_1, a_2)$ 使得

$$r_0^2 \sup_{BT(r_0, a_1, a_2)} |B|^2 = \max_{0 \leqslant r \leqslant a_1} \left\{ r^2 \sup_{BT(r, a_1, a_2)} |B|^2 \right\} \tag{5.11}$$

和

$$|B_0|^2 = |B|^2(Q_0) = \sup_{BT(r_0, a_1, a_2)} |B|^2. \tag{5.12}$$

显然,从(5.8)和(5.12)得

$$|B_0|^2 \geqslant \sup_{BT(0, 2a_1, a_2 - a_1)} |B|^2 \geqslant \delta^2. \tag{5.13}$$

根据 r_0 和 Q_0 的选取,易见

$$\sup_{B_{Q_0}(r_0/2)} |B|^2 \leqslant \sup_{BT(r_0/2, a_1, a_2)} |B|^2 \leqslant 4 \sup_{BT(r_0, a_1, a_2)} |B|^2 = 4|B_0|^2. \tag{5.14}$$

令

$$b := \int_{BT(0, a_1, a_2)} |B|^n \mathrm{d}v_M,$$

则只要证明当 $b \leqslant \varepsilon_0$ 时

$$r_0^2 |B_0|^2 \leqslant (\varepsilon_0^{-1} b)^{2/n},$$

其中 $\varepsilon_0 > 0$ 是某个仅与 n, H 和 δ 有关的一致常数. 我们用反证法. 假定对任何充分小的满足(5.9)的 ε_0 都有

$$r_0^2 |B_0|^2 > (\varepsilon_0^{-1} b)^{2/n}. \tag{5.15}$$

设 g 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 的欧氏度量. 作相似变换

$$\widetilde{g} = 4(\varepsilon_0^{-1} b)^{-2/n} |B_0|^2 g,$$

并用带"～"的字母表示关于新度量 $\widetilde{g}$ 的对应量. 由(5.15)可见

$$\widetilde{B}_{Q_0}(1) \subset B_{Q_0}(r_0/2).$$

再从(5.14)就得

$$\begin{aligned} \sup_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{B}|^2 &\leqslant \frac{1}{4} (\varepsilon_0^{-1} b)^{2/n} |B_0|^{-2} \left(\sup_{B_{Q_0}(r_0/2)} |B|^2 \right) \\ &\leqslant (\varepsilon_0^{-1} b)^{2/n} = 4 |\widetilde{B}(Q_0)|^2 = 4 |\widetilde{B}_0|^2 \leqslant 1, \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中最后一个不等号根据(5.14). 而且,从(5.13)有

$$\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{B}|^n \mathrm{d}\widetilde{v}_M \leqslant \int_{B_{Q_0}(r_0/2)} |B|^n \mathrm{d}v_M \leqslant \int_{BT(r_0/2,a_1,a_2)} |B|^n \mathrm{d}v_M \leqslant b \tag{5.17}$$

及

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(\varepsilon_0^{-1}b)^{1/n}|B_0|^{-1}H \leqslant H/2\delta. \tag{5.18}$$

由引理 5.3，我们有

$$\widetilde{\triangle}|\widetilde{B}|^2 \geqslant -\frac{n^2}{2(n-1)}|\widetilde{B}|^4,$$

其中 $\widetilde{\triangle}$ 表示关于 $\widetilde{g}$ 的 Laplacian. 若记

$$f := |\widetilde{B}|^2,$$

则由(5.16)得

$$-\widetilde{\triangle} \leqslant \frac{n^2}{2(n-1)}f, \quad \forall \quad \widetilde{B}_{Q_0}(1). \tag{5.19}$$

对于某个待定的 $\eta \in C_0^1(\widetilde{B}_{Q_0}(1))$，在(5.19)两边乘 $\eta^2 f^{\alpha-1}$(常数 $\alpha \geqslant 2$)后积分. 应用分部积分，可得

$$\begin{aligned}&(\alpha - 1 - \varepsilon)\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 f^{\alpha-1}|\widetilde{\nabla} f|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_{\widetilde{M}} \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} f^\alpha |\widetilde{\nabla}\eta|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_{\widetilde{M}} + \frac{n^2}{2(n-1)}\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 f^\alpha \mathrm{d}\widetilde{v}_M,\end{aligned} \tag{5.20}$$

其中 $\varepsilon(>0)$ 是任意实数. 另一方面，易见

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{\nabla}(\eta f^{\alpha/2})|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M \\ &= \frac{\alpha^2}{4}\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 f^{\alpha-2}|\widetilde{\nabla} f|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M + \int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} f^\alpha |\widetilde{\nabla}\eta|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M \\ &\quad + \alpha\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \eta f^{\alpha-1}\langle\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}\eta\rangle \mathrm{d}\widetilde{v}_M \qquad (5.21) \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\right)\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 f^{\alpha-2}|\widetilde{\nabla} f|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M\end{aligned}$$

$$+\left(1+\frac{\alpha}{2\varepsilon}\right)\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} f^\alpha |\widetilde{\nabla}\eta|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M.$$

把(5.20)代入(5.21)并取 $\varepsilon = 1/2$,可得

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{\nabla}(\eta f^{\alpha/2})|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M \\ &\leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)n^2}{4(2\alpha-3)(n-1)}\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \eta^2 f^\alpha \mathrm{d}\widetilde{v}_M \\ &\quad + \frac{3(\alpha^2-1)}{2\alpha-3}\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} f^\alpha |\widetilde{\nabla}\eta|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M \\ &\leqslant \alpha C_1(n)\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} (|\widetilde{\nabla}\eta|^2 + \eta^2) f^\alpha \mathrm{d}\widetilde{v}_M,\end{aligned} \tag{5.22}$$

其中 $C_1(n)$ 是仅与 n 有关的一致常数.

把引理 5.4 应用于函数 $\eta f^{\alpha/2}$,并利用(5.18),则有

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} (\eta^2 f^\alpha)^{\frac{n}{n-2}} \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leqslant C_0(n)\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{\nabla}(\eta f^{\alpha/2})|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M + C_0(n)\frac{H^2}{4\delta^2}\int_{\widetilde{B}_{QP_0}(1)} \eta^2 f^\alpha \mathrm{d}\widetilde{v}_M.\end{aligned} \tag{5.23}$$

把(5.22)代入(5.23),得

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} (\eta^2 f^\alpha)^{\frac{n}{n-2}} \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leqslant \alpha C_2(n,\delta,H)\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} (|\widetilde{\nabla}\eta|^2 + \eta^2) f^\alpha \mathrm{d}\widetilde{v}_M,\end{aligned} \tag{5.24}$$

其中 $C_2(n,\delta,H)$ 是一致常数,$\alpha(\geqslant 2)$ 是任意常数.

对于 $k = 0,1,2,\cdots$, 令 $\alpha_k = 2n^k/(n-2)^k, r_k = (1/2) + (1/2^{k+1})$. 选取 $\eta_k \in C_0^1(\widetilde{B}_{Q_0}(r_k))$ 使得

$$\begin{cases}\eta_k(P) = 1, P \in \widetilde{B}_{Q_0}(r_k+1), \\ |\widetilde{\nabla}\eta_k| \leqslant 2^{k+3}.\end{cases}$$

用 α_k 和 η_k 代替(5.24) 中的 α 和 η，得

$$\|f\|_{L^{\alpha_{k+1}}(\widetilde{B}_{Q_0}(r_{k+1}))} \leqslant (2C_2\alpha_k 4^{k+3})^{\frac{1}{\alpha_k}} \|f\|_{L^{\alpha_k}(\widetilde{B}_{Q_0}(r_k))}, \tag{5.25}$$

其中 $\|f\|_{L^{\alpha_k}(\widetilde{B}(r_k))} = \left(\int_{\widetilde{B}(r_k)} f^{\alpha} \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right)^{1/\alpha}$. 根据(5.25)，对 f 使用标准的 Moser 迭代，可得

$$\begin{aligned} f(Q_0) = |\widetilde{B}_0|^2 &\leqslant C_3(n,\delta,H)\left(\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} f^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right)^{1/2} \\ &\leqslant 2C_3(n,\delta,H)\,|\widetilde{B}_0|\left(\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} f \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

其中 $C_3(n,\delta,H)$ 是一致常数，最后的不等号是根据(5.16). 这样，由(5.17) 及 f 与 b 的定义，就有

$$\begin{aligned} |\widetilde{B}_0|^2 &\leqslant 4(C_3(n,\delta,H))^2\left(\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{B}|^2 \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right) \\ &\leqslant 4(C_3(n,\delta,H))^2\left(\mathrm{Vol}(\widetilde{B}_{Q_0}(1))\right)^{\frac{n-2}{n}}\left(\int_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} |\widetilde{B}|^n \mathrm{d}\widetilde{v}_M\right)^{\frac{2}{n}} \\ &\leqslant 4(C_3(n,\delta,H))^2\left(\mathrm{Vol}(\widetilde{B}_{Q_0}(1))\right)^{\frac{n-2}{n}} b^{\frac{2}{n}}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

考虑度量为 $\widetilde{g}$ 的 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中具有常平均曲率 $\widetilde{H}$ 的超曲面 M，由 M 的 Gauss 方程，M 的截面曲率 $\widetilde{K}_M$ 满足

$$\widetilde{K}_M \geqslant -\frac{1}{2}|\widetilde{A}|^2 = -\frac{1}{2}|\widetilde{B}|^2 - \frac{n}{2}\widetilde{H}^2.$$

利用(5.16) 和(5.18)，从上式可得

$$\widetilde{K}_M|_{\widetilde{B}_{Q_0}(1)} \geqslant -\frac{1}{2} - \frac{nH^2}{4\delta^2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{nH^2}{2\delta^2}\right),$$

从而由体积比较定理有

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{B}_{Q_0}(1)) \leqslant V(n,\delta,H), \tag{5.27}$$

其中 $V(n,\delta,H)$ 表示常曲率 $-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{nH^2}{2\delta^2}\right)$ 的 n 维空间形式中单位测地球的体积. 由(5.26) 和(5.27) 得

$$|\widetilde{B}_0|^2 \leqslant C_4(n,\delta,H)b^{2/n}, \tag{5.28}$$

其中 $C_4(n,\delta,H)$ 是仅与 n,δ,H 有关的一致常数. 把(5.16)中的等式 $(\varepsilon_0^{-1}\mu)^{2/n} = 4|\widetilde{B}_0|^2$ 代入(5.28)的左边,得

$$\varepsilon_0 \geqslant 2^{-n}(C_4(n,\delta,H))^{-n/2}.$$

但当 ε_0 充分小时,这是不可能的. 这个矛盾就证明了我们的命题. 证毕.

5.3 具有有限全曲率的常平均曲率超曲面

我们先引进下面的含义.

定义 对于 n 维超曲面 M,积分

$$\int_M |B|^n \mathrm{d}v_M, \tag{5.29}$$

称为 M 的全曲率. 对于极小超曲面,这就是全数量曲率.

容易验证,全曲率是一个共形不变量. 作为定理 5.2 的某种推广,我们有下列定理[SZ2].

定理 5.6 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中完备非紧的定向的常平均曲率超曲面,若 M 是强稳定的且具有有限全曲率,则 M 必是超平面.

推论 5.7 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中具有有限全曲率的完备常平均曲率图必是超平面.

为了证明这个定理,我们先证明两个引理.

引理 5.8 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中完备非紧的常平均曲率($H \neq 0$)超曲面,那么,对于任何 $r > 2\pi/|H|$,必有

$$\sup_{BT(0,r,5r)} |B|^2 > \frac{H^2}{4n}. \tag{5.30}$$

证明 用反证法. 假设

$$\sup_{BT(0,r,5r)} |B|^2 \leqslant \frac{H^2}{4n}. \tag{5.31}$$

不失一般性,可设 $H > 0$. 取 $\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1} = \boldsymbol{n}\}$ 是沿 M 的局部 Darbous 幺正标架场,使得(1.16)成立. 从(3.16)可见

$$|B|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

由此得

$$\lambda_j - \sqrt{n}\,|B| \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_j + \sqrt{n}\,|B|.$$

上式两边对 j 作和,则有

$$H - \sqrt{n}\,|B| \leqslant \lambda_i \leqslant H + \sqrt{n}\,|B|.$$

再根据假设(5.31),得

$$\lambda_i \geqslant H/2, \quad \forall\ BT(0,r,5r).$$

于是,由 Gauss 方程,M 的截面曲率 K_M 满足

$$K_M \geqslant H^2/4 > 0, \quad \forall\ BT(0,r,5r). \tag{5.32}$$

令 ρ 是 M 上的距离函数,$P_0 \in \partial B(3r)$. 于是,$B_{P_0}(3r/2) \subset BT(0,r,5r)$. 取 $P_1 \in B_{P_0}(3r/2)$ 使得 $\rho(P_0,P_1) = 5r/4$. 因为 M 是完备的,故存在极小正规测地线 $\gamma \subset B_{P_0}\left(\frac{3}{2}r\right)$ 使得 $\gamma(0) = P_0$ 和 $\gamma(l) = P_1$,这里 $l = \frac{5}{4}r$. 设 V 是沿 γ 的平行向量场,满足 $\gamma'(0) \perp V(0)$,则以 V 为变分向量场的弧长的第二变分公式是

$$\begin{aligned} L''_V(0) &= -\int_0^l \langle \sin\pi sV, -\pi^2\sin\pi sV + R(l\gamma'(s),\sin\pi sV)l\gamma'(s)\rangle \mathrm{d}s \\ &= \int_0^l \sin^2\pi s(\pi^2 - l^2K_M(\gamma',V))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

若 $l = \rho(P_0,P_1) > 2\pi/H$,则因为 $\gamma \subset B_{P_0}\left(\frac{3}{2}r\right) \subset BT(0,r,5r)$,(5.32) 式将给出 $L''_V(0) < 0$,但这与 γ 是极小正规测地线矛盾. 所以,

$$l = \rho(P_0,P_1) \leqslant 2\pi/H.$$

另一方面,显而易见

$$\frac{2\pi}{H} < r < \frac{5}{4}r = \rho(P_0,P_1) = l.$$

这个矛盾就证明了我们的引理. 证毕.

引理5.9 设M是$\mathbf{E}^{n+1}$中完备定向的常平均曲率($H\neq 0$)超曲面，令$a_1\left(>\frac{\pi}{|H|}\right)$和$a_2(\geqslant 11a_1)$是两正实数，那么，存在仅与$n$和$H$有关的正常数$\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,H)$，使得当

$$\int_{BT(0,a_1,a_2)}|B|^n\mathrm{d}v\leqslant\varepsilon_0$$

时，有

$$\sup_{r\leqslant r\leqslant a_1}\left\{r^2\sup_{BT(0,a_1,a_2)}|B|^2\right\}\leqslant\varepsilon_0^{-\frac{2}{n}}\left(\int_{BT(0,a_1,a_2)}|B|^n\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}.$$

证明 根据引理5.8，对于上述常数a_1和a_2，我们有

$$\sup_{BT(0,2a_1,a_2-a_1)}|B|^2>\frac{H^2}{4n}.$$

再根据命题5.5，即可得引理5.9.证毕.

定理5.6的证明 不失一般性，可设$H\geqslant 0$.全曲率有限意味着存在递减的正函数$\{\varepsilon(r)\}$，满足$\lim_{r\to+\infty}\varepsilon(r)=0$，使得对于充分大的$r$有

$$\int_{M\setminus B(r)}|B|^n\mathrm{d}v<\varepsilon(r).$$

特别有

$$\int_{BT(0,r,11r)}|B|^n\mathrm{d}v\leqslant\int_{M\setminus B(r)}|B|^n\mathrm{d}v<\varepsilon(r).\tag{5.33}$$

由(5.33)并利用引理5.9，可见若$H\neq 0$，则存在仅与n和H有关的正常数$\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,H)$，使得对于充分大的$r>\frac{2\pi}{H}$和$\varepsilon(r)<\varepsilon_0$有

$$\begin{aligned}r^2\sup_{BT(0,r,5r)}|B|^2&\leqslant\sup_{0\leqslant a\leqslant r}\left\{a^2\sup_{BT(a,r,5r)}|B|^2\right\}\\&\leqslant\varepsilon_0^{-\frac{2}{n}}\left(\int_{BT(0,r,5r)}|B|^n\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}\leqslant 1.\end{aligned}\tag{5.34}$$

(5.34)意味着

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\sup_{BT(0,r,5r)}|B|^2\right\}=0.$$

这与引理 5.8 矛盾. 因此, $H=0$. 再根据定理 4.4, 就得定理 5.6. 证毕.

根据定理 5.6 的上述证明, 我们有下列推论([SZ2]).

推论 5.10 设 M 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中完备定向的常平均曲率超曲面. 若 M 具有有限全曲率, 则或者 M 是极小超曲面, 或者 M 是紧致超曲面.

注记 $\mathbf{E}^{n+p}$ 中的一片(可微) n 维子流形 M 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集 U 到 $\mathbf{E}^{n+p}$ 的(可微)映射 $x: U\to\mathbf{E}^{n+p}$, 使得像 $M=x(U)$ 与 U 是微分同胚. p 称为子流形 M 的余维数. 超曲面就是余维数为 1 的子流形. 命题 5.5 和推论 5.10 都可推广到子流形的情况, 请参考文献[Shy].

§6 平均曲率流

本节简单介绍 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中超曲面的一类特殊的单参数(如时间参数)形变, 即所谓平均曲率流, 它已成为几何分析的重要内容之一.

6.1 平均曲率流方程

设 M 是 n 维光滑流形, 并设

$$\mathbf{y}(x,t): M\to\mathbf{E}^{n+1},\quad x\in M$$

是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中一族单参数 t 的光滑浸入超曲面 $\{M_t\}$, 使得 $M_0=M$, $\mathbf{y}(x,t)$ 为 M_t 在 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中的位置向量. 在 M 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 下, M_t 的黎曼度量(第一基本形式) $g(x,t)$ 和第二基本形式 $A(x,t)$ 可表示为

$$g(x,t)=g_{ij}(x,t)\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,\quad g_{ij}(x,t)=\mathbf{y}_i\cdot\mathbf{y}_j,$$

$$A(x,t) = h_{ij}(x,t)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \quad h_{ij}(x,t) = \mathbf{y}_{ij} \cdot \boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{n}(x,t)$ 是 M_t 的单位法向量，$\mathbf{y}_i = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x^i}$，$\mathbf{y}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^i \partial x^j}$，“·”表示 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中向量的内积. 于是，M_t 的平均曲率是

$$H(x,t) = \frac{1}{n} g^{ij}(x,t) h_{ij}(x,t), \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

向量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{y}(x,t) = nH(x,t)\boldsymbol{n}(x,t), \quad x \in M, \quad t > 0 \tag{6.1}$$

称为**平均曲率流方程**，或平均曲率流的曲面**发展方程**；它的解 $\mathbf{y}(x,t)$ 称为**平均曲率流**. 在几何上，方程(6.1)表示超曲面沿其法向量方向按平均曲率大小的形变；它的物理背景是：金属淬火时金属颗粒表面的性态.

类似于 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面论，$\mathbf{E}^{n+1}$ 中超曲面 M_t 的 Gauss-Weingarten 公式是

$$\mathbf{y}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{y}_k + h_{ij}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}_i = -h_{ij}g^{jk}\mathbf{y}_k, \tag{6.2}$$

其中 $\boldsymbol{n}_i = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^i}$. 由此可解出

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Γ_{ij}^k 确定了黎曼流形 $(M_t, g(x,t))$ 上的黎曼联络 1-形式 $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \mathrm{d}x^k$ 和共变微分 D(见本章第三节或文献[6]). 例如，对于张量 $T = T_j^i \partial_i \otimes \mathrm{d}x^j$，

$$\mathrm{D}T_j^i = \mathrm{d}T_j^i + T_j^k \omega_k^i - T_k^i \omega_j^k := T_{j,k}^i \mathrm{d}x^k,$$

其中

$$T_{j,k}^i := \partial_k T_j^i + T_j^l \Gamma_{lk}^i - T_l^i \Gamma_{jk}^l$$

称为 T_j^i 的**共变导数**.

M_t 的 Gauss-Codazzi 方程是

$$R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \quad h_{ij,k} = h_{ik,j}, \tag{6.3}$$

其中 $h_{ij,k} = \partial_k h_{ij} - h_{il}\Gamma^l_{jk} - h_{jl}\Gamma^l_{ik}$. 由(6.3),$M_t$ 的 Ricci 张量和数量曲率分别是

$$R_{ij} = nHh_{ij} - g^{kl}h_{ki}h_{lj}, \tag{6.4}$$

$$R = n^2H^2 - |A|^2, \quad |A|^2 = g^{ik}g^{jl}h_{ij}g_{kl}. \tag{6.5}$$

黎曼流形$(M_t, g(x,t))$上的 Laplacian 定义为 $\triangle_t f := g^{ij}(x,t)f_{,ij}, \forall f \in C^2(M_t)$. 注意,$f_{,i} = \partial_i f$. 于是,利用(6.2),

$$\triangle_t \mathbf{y} = g^{ij}\mathbf{y}_{,ji} = g^{ij}(\mathbf{y}_{ij} - \Gamma^k_{ij}\mathbf{y}_k) = g^{ij}h_{ij}\boldsymbol{n} = nH\boldsymbol{n}.$$

这样,方程(6.1)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{y}(x,t) = \triangle_t \mathbf{y}. \tag{6.6}$$

6.2 解的短时间存在性

方程(6.6)不是强抛物的. 事实上,由 Γ^k_{ij} 的定义,我们有

$$\triangle_t \mathbf{y} = g^{ij}\{\mathbf{y}_{ij} - g^{kl}\mathbf{y}_k(\mathbf{y}_l \cdot \mathbf{y}_{ij})\}.$$

于是,在超曲面的切方向,算子 $\triangle_t$ 是蜕化的. 为了能用强抛物型方程理论来得到解的短时间存在性,我们可用 DeTurck 方法([DT],[Zh]).

考虑 M 上的一个微分同胚 $\bar{x} = \bar{x}(x,t)$,并设 $\tilde{\mathbf{y}}(\bar{x},t)$ 满足下列方程

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial t} = \triangle_t \tilde{\mathbf{y}} + v^k \tilde{\mathbf{y}}_k, \tag{6.7}$$

其中 $v = v^k(x,t)\partial_k$ 是一待定的向量场,使得方程(6.7)是强抛物的. 于是,

$$\mathbf{y}(x,t) = \tilde{\mathbf{y}}(\bar{x}(x,t),t) \tag{6.8}$$

满足

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{y}}_{,k}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t} = \triangle_t \tilde{\mathbf{y}} + \left(v^k + \frac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}\right)\tilde{\mathbf{y}}_k.$$

如果我们选取 $\bar{x}(x,t)$ 满足下列条件：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t} = -v^k(x,t), \\ \bar{x}^k|_{t=0} = x^k,\end{cases}$$

则(6.8)确定的 $\mathbf{y}(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial T} = \triangle_t \tilde{\mathbf{y}} = \triangle_t \mathbf{y}.$$

现选取

$$v^k = g^{ij}(\Gamma_{ij}^k - \overline{\Gamma}_{ij}^k),$$

其中 $\overline{\Gamma}_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k(\bar{x}(x,0))$. 于是，方程(6.7)化为

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial t} = g^{ij}(\tilde{\mathbf{y}}_{ij} - \overline{\Gamma}_{ij}^k \tilde{\mathbf{y}}_k).$$

这是强抛物型方程. 这样，我们已证明了下列

定理 6.1 设 $\mathbf{y}_0$ 是 M 到 $\mathbf{E}^{n+1}$ 的光滑浸入，使得它的第二基本形式有界，那么，存在正数 T，使得下列 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = nH\boldsymbol{n}, \\ \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_0\end{cases}$$

在 $M \times [0,T)$ 上有光滑解 $\mathbf{y}(\cdot,t)$. 而且，若 M 是紧致的，则解是唯一的.

6.3 度量和曲率的发展

根据方程(6.1)，直接计算可得

引理 6.2 对于平均曲率流，我们有

(i) $\dfrac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2nHh_{ij}$,

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{n} = -ng^{ij}H_{,j}\mathbf{y}_i = -n(\mathrm{grad}H)$,

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \triangle h_{ij} - 2nHg^{kl}h_{ik}h_{jl} + |A|^2 h_{ij}$,

(iv) $\frac{\partial}{\partial t}H = \triangle H + |A|^2 H$,

(v) $\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \triangle |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4$.

这里以(i)为例,计算如下,其他请读者自行验证.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j) = n(H\boldsymbol{n})_i \cdot \mathbf{y}_j + n\mathbf{y}_j \cdot (H\boldsymbol{n})_j \\ &= nH\{\boldsymbol{n}_i \cdot \mathbf{y}_i + \mathbf{y}_i \cdot \boldsymbol{n}_j\} = -2nH\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{y}_{ij} \\ &= -2nHh_{ij}.\end{aligned}$$

下面的引理是平凡的,读者可参考本章第三节或文献[6].

引理 6.3 对于平均曲率流,

(i) $\triangle h_{ij} = nH_{ij} + nHg^{kl}h_{kj}h_{lj} - |A|^2 h_{ij}$,

(ii) $\frac{1}{2}\triangle |A|^2 = |\nabla A|^2 + ng^{ki}g^{lj}h_{kl}H_{ij} + nH\mathrm{tr}A^3 - |A|^4$.

设 M_{ij} 是 M_t 上的两对称张量.若对于任何向量 v^k 均有 $M_{ij}v^iv^j \geqslant 0$,则称 M_{ij} 是非负的,记为 $M_{ij} \geqslant 0$.现设 $N_{ij} = P(M_{ij}, g_{ij})$ 是关于 M_{ij} 的多项式(可包含 M_{ij} 通过度量张量与自身的缩并).我们有下列(可参考[Zh])

引理 6.4([Ha]) 假设对于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有

$$\frac{\partial}{\partial t}M_{ij} = \triangle M_{ij} + u^k M_{ij,k} + N_{ij},$$

其中 $N_{ij} = P(M_{ij}, g_{ij})$ 满足下列条件:只要 $M_{ij}v^j = 0$,就有 $N_{ij} \geqslant 0$.那么,若 $t = 0$ 时 $M_{ij} \geqslant 0$,则当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时同样有 $M_{ij} \geqslant 0$.

作为引理 6.4 的应用,我们立即有

引理 6.5 若 $t = 0$ 时有 $h_{ij} \geqslant 0$,则 $t > 0$ 时同样有 $h_{ij} \geqslant 0$.

证明 由引理 6.2 的(iii),h_{ij} 满足类似引理 6.4 的方程.现设向量 v^k 满足 $h_{ij}v^j = 0$,则

$$(-2nHg^{kl}h_{ik}h_{jl} + |A|^2 h_{ij})v^j = 0.$$

因此,由引理 6.4 即得证明.

引理 6.6 若 $t = 0$ 时有 $\alpha Hg_{ij} \leqslant h_{ij} \leqslant \beta Hg_{ij}$ 和 $H \geqslant 0$,其中

α,β 是常数，则 $t>0$ 时上述关系仍成立.

证明　由引理 6.2 的(iv)，根据抛物型方程的极大原理，可见对一切 $t\geqslant 0$ 都有 $H\geqslant 0$. 为了证明 $\alpha Hg_{ij}\leqslant h_{ij}$，令

$$M_{ij}:=h_{ij}-\alpha Hg_{ij}.$$

利用引理 6.2 和 6.3，

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}-\alpha\frac{\partial H}{\partial t}g_{ij}-\alpha H\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}=\triangle h_{ij}-2nHg^{kl}h_{ki}h_{lj}+$$
$$|A|^2h_{ij}-\alpha(\triangle H+|A|^2H)g_{ij}-\alpha H(-2nHh_{ij})$$
$$=\triangle(h_{ij}-\alpha Hg_{ij})-2nHg^{kl}h_{ki}h_{lj}+|A|^2h_{ij}-\alpha H|A|^2g_{ij}+$$
$$2\alpha nH^2h_{ij}.$$

对任何使 $M_{ij}v^j=0$ 的 v^i，我们有

$$(-2nHg^{kl}h_{ki}h_{lj}+|A|^2h_{ij}-\alpha H|A|^2g_{ij}+2\alpha nH^2h_{ij})v^j$$
$$=-2nHg^{kl}h_{ik}(\alpha Hv_l)+|A|^2(\alpha Hv_i)-\alpha H|A|^2v_i$$
$$+2\alpha nH^2(\alpha Hv_i)$$
$$=-2nH(\alpha Hv_i)\alpha H+2\alpha nH^2(\alpha Hv_i)=0.$$

因此，由引理 6.4 即得证. 对于 $h_{ij}\leqslant\beta Hg_{ij}$，证明完全类似. 证毕.

若 $\mathbf{y}(\cdot):M\to\mathbf{E}^{n+1}$ 是嵌入超曲面，并且它的第二基本形式正定，则称为(严格) **凸超曲面**.

定理 6.7(保持凸性)　设 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 是平均曲率流方程(6.1)的解. 若初始超曲面 $\mathbf{y}(\cdot,0)$ 是紧致凸超曲面，则对于 $t>0$，$\mathbf{y}(\cdot,t)$ 也是紧致凸超曲面.

证明　由引理 6.2 的(iv)，根据抛物型方程的强极大原理，可见对于 $t>0$ 有 $H(\cdot,t)>0$. 由引理 6.5 和 6.6，可见对于 $t>0$，$\mathbf{y}(\cdot,t)$ 的第二基本形式正定. 为了证明保持嵌入性，我们用反证法，假设 $t_0>0$ 是使解曲面 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 成为自相交的第一时刻. 那么，在自相交点处，必有一片超曲面，它的第二基本形式负定. 这与 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 的第二基本形式正定矛盾. 证毕.

6.4 紧致凸超曲面的收缩

考虑下列平均曲率流
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = nH\boldsymbol{n}, & M \times [0,T), \\ \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{6.9}$$
其中 $\mathbf{y}_0$ 是 $\mathbf{E}^{n+1}$ 中已给的紧致凸超曲面. 假设 $0 \leqslant t \leqslant T$ 是使方程 (6.9) 的解 $\mathbf{y}(\cdot, t)$ 存在的最大时间区间,那么我们有

引理 6.8 $T < +\infty$

证明 由引理 6.2 的(iv),
$$\frac{\partial}{\partial t}H = \triangle H + |A|^2 H \geqslant \triangle H + \frac{1}{n}H^3.$$
设 φ 是下列常微分方程的解:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{n}\varphi^3, \quad \varphi(0) = H_{\min}(0) > 0.$$
若把 φ 看作 $M \times [0,T)$ 上的函数,则得
$$\frac{\partial}{\partial t}(H - \varphi) \geqslant \triangle(H - \varphi) + \frac{1}{n}(H^3 - \varphi^3).$$
由极大原理,可见
$$H \geqslant \varphi \quad \forall\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$
另一方面,φ 可直接解得
$$\varphi(t) = \frac{H_{\min}(0)}{\sqrt{1 - (2/n)H_{\min}^2(0)t}}.$$
因为当 $t \to (n/2)H_{\min}^{-2}(0)$ 时,$\varphi \to \infty$,从而 $H \to \infty$. 因此,$T \leqslant (n/2)H_{\min}^{-2}(0)$. 证毕.

对于紧致凸超曲面 $M^n \subset \mathbf{E}^{n+1}$,我们可把它参数化为单位球面 S^n 上的图如下:
$$\mathbf{z} = \pi(x) = \frac{\mathbf{y}(x)}{|\mathbf{y}(x)|} : M^n \to S^n,$$
$$y = r(z)\mathbf{z} : S^n \to \mathbf{E}^{n+1}, \quad r(z) = |\mathbf{y}(\pi^{-1}(z))|. \tag{6.10}$$

用 $\bar{g}_{ij}$ 表示 $S^n \subset \mathbf{E}^{n+1}$ 的标准黎曼度量. 在(6.10) 下，我们有

$$\mathbf{y}_{;i} = r_{;i}\mathbf{z} + r\mathbf{z}_{;i},$$

其中“;”表示关于 $\bar{g}_{ij}$ 的黎曼联络的共变导数. 同样，

$$\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}}(r\mathbf{z} - \bar{g}^{ij}r_{;i}\mathbf{z}_{;j}),$$

其中 $|\mathrm{grad}r|^2 = \bar{g}^{ij}r_{;i}r_{;j}$. 于是，$M^n$ 的度量可表达为

$$g_{ij} = r^2\bar{g}_{ij} + r_{;i} \cdot r_{;j}, \tag{6.11}$$

$$g^{ij} = r^{-2}\left(\bar{g}^{ij} - \frac{\bar{g}^{ik}r_{;k}\bar{g}^{jl}r_{;l}}{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}\right). \tag{6.12}$$

M^n 的第二基本形式是

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\frac{1}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}}\{(r\mathbf{z} - \bar{g}^{kl}r_{;k}\mathbf{z}_{;l}) \cdot (r_{;j}\mathbf{z} + r\mathbf{z}_{;j})_{;i}\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}}\{rr_{;ij} - r^2\bar{g}_{ij} - 2\bar{g}^{kl}r_{;k}\bar{g}_{li}r_{;j}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}}(-rr_{;ij} + 2r_{;i}r_{;j} + r^2\bar{g}_{ij}). \end{aligned} \tag{6.13}$$

对于 $\mathbf{y}(x,t) = r(z,t)\mathbf{z}$，由(6.9) 和(6.10) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{y}(x,t) &= \frac{\partial r}{\partial t}\mathbf{z} + (\mathrm{grad}r \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t})z + r\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ &= nH\boldsymbol{n} \\ &= \frac{nH}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}}(\bar{g}^{ij}r_{;i}\mathbf{z}_{;j} - r\mathbf{z}). \end{aligned}$$

由此，

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= -\frac{nHr}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}} - \mathrm{grad}r \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ &= -\frac{nH}{r}\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

另一方面，由(6.12) 和(6.13)，

$$nH = g^{ij}h_{ij} = -r^{-2}\left(\bar{g}^{ij} - \frac{\bar{g}^{ik}r_{;k}\bar{g}^{jl}r_{;l}}{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}\right)\frac{rr_{;ij} - 2r_{;ij}r_{;j} - r^2\bar{g}_{ij}}{\sqrt{r^2 + |\mathrm{grad}r|^2}}.$$

因此，$r(z,t)$ 的发展方程是

$$\frac{\partial r}{\partial t}=r^{-3}\left(\bar{g}^{ij}-\frac{\bar{g}^{ik}r_{;k}\bar{g}^{jl}r_{;l}}{r^2+|\mathrm{grad}r|^2}\right)(rr_{;ij}-2r_{;i}r_{;j}-r^2\bar{g}_{ij}).\qquad(6.15)$$

现在我们可建立下面的

定理 6.9([Hu]) 平均曲率流方程(6.9)的解 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 在最大时间区间 $0\leqslant t<T<+\infty$ 存在，而且当 $t\to T$ 时，$\mathbf{y}(\cdot t)$ 一致收敛到一点.

证明 定理的第一部分可从引理 6.8 得到. 下面证明定理的第二部分. 由引理 6.2 的(i)，易见

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g_{ij}}=-H^2\sqrt{g_{ij}}<0.$$

因此，$\mathbf{y}(\cdot,t)$ 的体积元 $\sqrt{g_{ij}}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$ 是递减的，从而 M_t 的体积是递减的. 这样，我们只要证明当 $t\to T$ 时，$\mathbf{y}(\cdot,t)$ 的体积趋向零.

用反证法. 假设不趋向零，则对一切 $t\in[0,T)$，可在 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 的区域内找到一个小球 $B_{r_0}(x_0)$. 不失一般性，可设 x_0 是原点. 注意到 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 的直径一致有界，因而 $r(z,t)$ 有一致上界和下界，而且 $|\mathrm{grad}r|$ 也一致有界. 这样，方程(6.15)是具有有界系数的一致抛物型方程. 根据一致抛物型方程的标准正则性理论(参考[LY])，解 $\mathbf{y}(\cdot,t)$ 在 $t=T$ 时是非奇异的. 于是，$\mathbf{y}(\cdot,tT)$ 可作为起始曲面，由局部存在性定理，又可得新解. 这与 T 是最大时间矛盾. 证毕.

为了更好地理解定理 6.9 中的收敛点，我们作如下规范化：对于使解 $\mathbf{y}(.\ ,t)$ 存在每个时刻 t，可找到正因子 $\psi(t)$ 使得由

$$\mathbf{y}(x,t)=\psi(t)\mathbf{y}(x,y)$$

给出的流形 $\widetilde{M}_t$ 的体积等于 M_0 的体积：$\int_{\widetilde{M}_t}\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\mathrm{Vol}(M_0)$. 若选取新的时间变量 $\tilde{t}(t)=\int_0^t\psi^2(\tau)\mathrm{d}\tau$，则不难验证 $\tilde{\mathbf{y}}$ 满足下列发展方程

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{y}}(x,\tilde{t}) = \widetilde{\triangle}_{\tilde{t}}\tilde{\mathbf{y}}(x,\tilde{t}) + \frac{1}{n}\tilde{h}_{\tilde{t}}\tilde{\mathbf{y}}(x,\tilde{t}), \\
\tilde{\mathbf{y}}(\cdot,0) = \mathbf{y}_0,
\end{cases}
\tag{6.16}
$$

其中

$$
\tilde{h}: = \frac{\int_{\widetilde{M}} \widetilde{H}^2 \mathrm{d}\tilde{\mu}}{\int_{\widetilde{M}} \mathrm{d}\tilde{\mu}}.
$$

可以证明:当 $\tilde{t} \to +\infty$ 时,超曲面 $\{\widetilde{M}_{\tilde{t}}\}$ 以 C^∞ 拓扑收敛于体积等于 $\mathrm{Vol}(M_0)$ 的球面(详细请参考[Hu]).超曲面还有其他的 r 次平均曲率流,参考[Zh],[SS] 等.

本章参考文献

[An1] Anderson MT. *The compactif of a minimal submanifold in Euclidean space by the Gauss map*, preprint(final version in Dept. of Math., California Inst. of Tech., Pasadena, CA 91125), 1986.

[An2] Anderson MT. *Local estimates for minimal submanifolds in dimensions greater than two.* Proc Symp Pure Math AMS, 44(1986): 131 ~ 137.

[BGG] Bombieri E, de Giorgi E, Giusti E. *Minimal cones and the Bernstein problem.* Invent Math, 7(1969):243 ~ 268.

[Chr] Chern SS. *On the curvature of a piece of hypersurface in Euclidean space.* AbhMath Sem Univ Hamburg, 29(1965):77 ~ 91.

[ChY] Cheng SY, Yua ST. *Hypersurfaces with constant scalar curvature.* Math Ann, 225(1977), 195 ~ 204.

[DP] do Carmo M, Peng CK. *Stable complete minimal hypersurfaces*. Proc 1980 Beijing Symp Diff Geom and Diff Equa, 1980, 3:1349 ~ 1358.

[CSZ] Cao HD, Shen Y, Zhu S. *The structure of stable minimal hypersurfaces in R^{n+1}*. Math Res Lett, 4(1977):637 ~ 644.

[DT] DeTurck D. *Deforming metrics in direction of their Ricci tensors*. J Diff Geom, 18(1983):157 ~ 162.

[Ha] Hamilton RS. *three-manifolds with positive Ricci curvature*. J Diff Geom, 17(1982):255 ~ 306.

[HS] Hoffman D, Spruck J. *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*. Comm Pure Appl Math, 27(1975):715 ~ 727.

[Hu] Huisken G. *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*. J Diff Geom, 20(1984): 237 ~ 266.

[LS] Simon L. *Remarks on curvature estimates for minimal hypersurfaces*. Duke Math J, 43(1976):545 ~ 553.

[LT] Li P, Tam LF. *Harmonic functions and the structure of complete manifolds*. J Diff Geom, 35(1992): 359 ~ 383.

[LY] Li P. Yau ST. *On the parabolic kernel of the Schrö dinger operator*. Acta Math, 156(1986): 153 ~ 201.

[Mi] Miranda M. *Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali*. Rend del Sem Mat della Universita di Padova, 38(1967): 91 ~ 107.

[Sc] Schoen R. *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*. J. Diff. Geom, 18(1983): 791 ~ 809.

[Si] Simons J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann of Math, 88(1968): 62 ~ 105.

[SS] Sheng WM. Shen YB. *Deforming convex hypersurfsces by the linear combination of the mean curvature and the n-th root of the Gauss-Kronecker curvature.* Acta Math Scientia, 17(1997): 129 ~ 142.

[SSY] Schoen R. Simon L. Yua ST. *Curvature estimates for minimal hypersurfaces.* Acta Math, 134(1975): 275 ~ 288.

[SZ1] Shen YB. Zhu XH. *On stable complete minimal hypersurfaces in* $\mathbf{R}^{n+1}$. Amer J Math, 120(1998): 103 ~ 116.

[SZ2] Shen YB. *On complete hypersurfaces with constant mean curvature and finite* L^p*-norm curvature in* $\mathbf{R}^{n+1}$. Acta Math Sinica, English Ser, 21(2005).

[Shy] Shen YB. *On complete noncompact submanifolds with finite total curvature.* Math Scie Resear J, 6(2002): No. 8, 404 ~ 416.

[Ty] Tysk T, *Finiteness of index and total scalar curvature for minimal hypersurfaces.* Proc Amer Math Soc, 105(1989): 429 ~ 435.

[Ya] Yau ST, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds.* Comm Pure Appl Math, 28(1975): 201 ~ 228.

[Zh] Zhu XP. *Lectures on mean curvature flows*, preprint.

附录A　欧氏空间点集拓扑概要

1　基本知识

n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 是一个点集，它的每个点 x 可表示为 $x=(x^1,\cdots,x^n)$，其中 $x^i(i=1,\cdots,n)$ 是实数，称为 x 的第 i 个坐标. 两点 x 和 $y=(y^1,\cdots,y^n)$ 之间的距离 $d(x,y)$ 定义为

$$d(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}.$$

不难验证这样定义的距离函数 $|x-y|$ 满足下列性质：

（Ⅰ）$|x-y|\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立；

（Ⅱ）$|x-y|=|y-x|$；

（Ⅲ）$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$.

定义 1.1　设 $x\in\mathbf{E}^n$，$\varepsilon>0$ 为任一实数，$\mathbf{E}^n$ 中满足不等式

$$|y-x|<\varepsilon$$

的点 y 的集合称为以 x 为中心的 ε 开球，记为 $B_\varepsilon(x)$. 如果子集 $A\subset\mathbf{E}^n$ 中的每一点都有一个开球属于 A，则称 A 为 $\mathbf{E}^n$ 的开集.

如果集 $A\subset\mathbf{E}^n$ 的一点 x 有一开球 $\subset A$，则 x 称为 A 的内点. A 的内点的全体称为 A 的内部，记为 $\mathrm{int}A$. 显然，$\mathrm{int}A$ 是开集.

命题 1.1　$\mathbf{E}^n$ 的开集具有下列性质：

（Ⅰ）$\mathbf{E}^n$ 与空集 $\varnothing$ 是开集；

（Ⅱ）有限多个开集的交是开集；

（Ⅲ）任意多个开集的并是开集.

证明是容易的，留给读者练习.

定义 1.2　设 $\{x_i\}(i=1,\cdots,m,\cdots)$ 为 $\mathbf{E}^n$ 中一个点序列，若

对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在指标 i_0，使得当 $i > i_0$ 时，有 $x_i \in B_\varepsilon(x_0)$，则称 x_0 为点列 $\{x_i\}$ 的极限，记作 $\{x_i\} \to x_0$.

定义 1.3 若以点 $y \in \mathbf{E}^n$ 为中心的每个开球都含有集 $A \subset \mathbf{E}^n$ 的不同于 y 的点，则 y 称为 A 的聚点或极限点.

命题 1.2 $\mathbf{E}^n$ 中点列 $\{x_i = (a_i^1, \cdots, a_i^n)\} \to x_0 = (a_0^1, \cdots, a_0^n)$ 的充要条件是，它的每个坐标序列 $\{a_i^k\} \to a_0^k$, $k = 1, \cdots, n$.

证明 当 $\{x_i\} \to x_0$ 时，从不等式

$$|a_i^k - a_0^k| \leqslant d(x_i, x_0)$$

即得 $\{a_i^k\} \to a_0^k$, $k = 1, \cdots, n$.

反之，若 $\{a_i^k\} \to a_0^k, k = 1, \cdots, n$，则对任一 $\varepsilon > 0$，以及每个 k，存在 i_k 使得当 $i > i_k$ 时，$|a_i^k - a_0^k| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. 于是当

$$i > i_0 = \max(i_1, \cdots, i_n)$$

时，成立

$$d(x_i, x_0) < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_i^k - a_0^k)^2} < \varepsilon,$$

即 $x_i \in B_\varepsilon(x_0)$. 因此 $\{x_i\} \to x_0$. 证毕.

从定义 1.3 可见，一点 y 为集 $A \subset \mathbf{E}^3$ 的聚点的充要条件是，y 的任一开球中包含 A 的无限多个点. 另一充要条件是，点 y 是由 A 中不同点组成的点列的极限.

定义 1.4 若集 $B \subset \mathbf{E}^n$ 的每个聚点都属于 B，则称 B 为 $\mathbf{E}^n$ 的闭集. 集 $A \subset E^n$ 的闭包是 A 与它的聚点的并，记为 $\overline{A}$.

显然，一个集的闭包是闭集. 集 A 为闭集的充要条件是 $A = \overline{A}$. 空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集.

命题 1.3 当且仅当集 $B \subset \mathbf{E}^n$ 的余集 $\mathbf{E}^n \backslash B$ 为开集时 B 是闭集.

证明 设 B 是闭集，并设 $x \in \mathbf{E}^n \backslash B$，于是 x 不是 B 的聚点，因此存在以 x 为中心的开球 $B_\varepsilon(x)$ 不包含 B 中任何点. 这样 $B_\varepsilon(x)$

$\subset \mathbf{E}^n \backslash B$,故 $\mathbf{E}^n \backslash B$ 是开集.

反之,设 $\mathbf{E}^n \backslash B$ 是开集,且 y 是 B 的一聚点,我们要证明 $y \in B$. 若 $y \overline{\in} B$,则 $y \in \mathbf{E}^n \backslash B$. 既然 $\mathbf{E}^n \backslash B$ 是开集,故存在开球 $B_\varepsilon(y) \subset \mathbf{E}^n \backslash B$,即 $B_\varepsilon(y)$ 中不含 B 中任何点. 这与 y 为 B 的聚点矛盾. 证毕.

定义 1.5 设集 $A \subset \mathbf{E}^n$. A 的边界 ∂A 是 $\mathbf{E}^n$ 中这样的点 x 的集合:以 x 为中心的每个开球中既含有 A 的点,又含有 $\mathbf{E}^n \backslash A$ 的点.

显然,当且仅当 ∂A 的点都不属于 A 时,A 是开集. 当且仅当 ∂A 的所有点都属于 A 时,A 是闭集.

定义 1.6 设 $U \subset \mathbf{E}^n$ 是开集,$f: U \to \mathbf{E}^m$ 是映射,点 $x_0 \in \mathbf{E}^n$. 若对 $f(x_0) = y \in \mathbf{E}^m$ 的任一开球 $B_\varepsilon(y)$,都存在 x_0 的开球 $B_\delta(x_0)$,使得 $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y)$,则称 f 在点 x_0 连续. 若 f 在 U 的每点都连续,则称 f 在 U 上连续,并称 $f: U \to \mathbf{E}^m$ 为连续映射.

根据上述定义和聚点的性质,容易证明下列命题.

命题 1.4 映射 $f: U \subset \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ 在 $x_0 \in U$ 连续的充要条件是,对 U 中任一收敛点序列 $\{x_i\} \to x_0$,点序列 $\{f(x_i)\} \to f(x_0)$.

利用连续性,可刻画开集和闭集.

命题 1.5 映射 $f: U \subset \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ 连续的充要条件是,对每个开集 $V \subset \mathbf{E}^m$,$f^{-1}(V)$ 是开集.

证明 设 f 在 U 上连续,并设 $V \subset \mathbf{E}^m$ 是开集. 若 $f^{-1}(V) = \varnothing$,则无需证明,因为 $\varnothing$ 是开集. 若 $f^{-1}(V) \neq \varnothing$,设 $x \in f^{-1}(V)$,则 $f(x) \in V$. 因为 V 是开的,故存在开球 $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. 根据 f 的连续性,存在开球 $B_\delta(x)$ 使得

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V.$$

因此,$B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$,即 $f^{-1}(V)$ 是开集.

现证其逆. 设对每个开集 $V \subset \mathbf{E}^m$,$f^{-1}(V)$ 是开的. 于是对于 $x \in U$ 和任给 $\varepsilon > 0$,$A = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ 是开集,即存在 $\delta > 0$,使 $B_\delta(x) \subset A$. 因此,

$$f(B_\delta(x)) \subset f(A) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

所以，f 在 x 是连续的. 由 x 的任意性便得证明. 证毕.

推论 1.6 $f: U \subset \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ 连续的充要条件是，对每个闭集 $B \subset \mathbf{E}^m$，$f^{-1}(B)$ 是闭集.

由命题 1.2 读者不难证明下述命题.

命题 1.7 设 $x \in U \subset \mathbf{E}^n$，$f: x \to (f^1(x), \cdots, f^m(x))$ 为 $U \subset \mathbf{E}^n$ 到 $\mathbf{E}^m$ 的映射，则 f 在 U 上连续的充要条件是每个 $f^k(k=1,\cdots,m)$ 为 U 上的连续函数.

定义 1.7 设 $\{x_i\}$ 是 $\mathbf{E}^n$ 中的点序列，若对于任何 $\varepsilon > 0$，存在指标 i_0，使得当 $j,k > i_0$ 时，有 $|x_j - x_k| < \varepsilon$，则点列 $\{x_i\}$ 称为 $\mathbf{E}^n$ 中的 Cauchy 序列.

利用命题 1.2 和实数域的完备性，可得下列命题.

命题 1.8 $\mathbf{E}^n$ 中点列 $\{x_i\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_i\}$ 是一 Cauchy 序列.

证明 显然，由定义，收敛序列是 Cauchy 序列. 反之，设 $\{x_i\}$ 是 Cauchy 序列，考虑它在 $\mathbf{E}^n$ 的第 k 轴上的投影($k=1,\cdots,n$). 这给出一个实数序列 $\{a_i^k\}$；由于投影减小距离，这序列也是 Cauchy 序列. 由实数域的完备性，$\{a_i^k\} \to a_0^k$. 因此，$\{x_i\} \to x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)$. 证毕.

2 连通性

定义 2.1 设 $A \subset \mathbf{E}^n$. 所谓 $V \subset A$ 是 A 中的开集意指存在开集 $U \subset \mathbf{E}^n$ 使得 $V = U \cap A$. 点 $x \in A$ 在 A 中的邻域是 A 中包含 x 的一个开集. 若 $B \subset A$，而 $A \setminus B$ 是 A 中的开集，则 B 称为 A 中的闭集.

定义 2.2 如果集 $A \subset \mathbf{E}^n$ 不能表示为 $A = U_1 \cup U_2$，其中 U_1 和 U_2 是 A 中不相交的非空开集，则称 A 为连通集.

命题 2.1 设 $A \subset \mathbf{E}^n$ 是连通集，$B \subset A$ 是 A 中的开集且又是 A 中的闭集，则 $B = A$ 或 $B = \varnothing$.

证明 设 $B \neq \varnothing$，且 $B \neq A$，则 $A = B \cup (A \backslash B)$. 因为 B 在 A 中是闭的，故 $A \backslash B$ 是开的. 于是 A 是两个不相交的非空开集 B 和 $A \backslash B$ 之并，这与 A 为连通集矛盾. 证毕.

命题 2.2 设 $f: A \subset \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ 是连续的，A 是连通集，则 $f(A)$ 也是连通集.

证明 设 $f(A)$ 不是连通集，则 $f(A) = U_1 \cup U_2$，其中 U_1 和 U_2 是 $f(A)$ 中的不相交的非空开集. 由于 f 是连续的，$f^{-1}(U_1)$ 和 $f^{-1}(U_2)$ 也是 A 中不相交的非空开集（命题 1.5）. 于是 $A = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$，这与 A 为连通集矛盾. 证毕.

$\mathbf{E}^1$ 中的连通集特别简单，它们都是“区间型”的，即如下类型的集：$a < x < b$, $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x \leqslant b$, $x \in \mathbf{E}^1$, a 和 b 可以相等，也可为 $\pm \infty$.

定义 2.3 连续曲线 $\gamma: [a,b] \to A \subset \mathbf{E}^n$ 称为 A 中连接 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 的**弧**. 如果对任意两点 $x, y \in A$，存在 A 中连接 x, y 的弧，则称 A 是**道路连通的**.

不难证明，若 A 是道路连通的，则 A 是连通集. 一般说，其逆不真.

定义 2.4 如果对任一点 $x \in A \subset \mathbf{E}^n$ 以及 A 中包含 x 的任一开集 U，总存在 A 中包含 x 的一个道路连通的开集 $V \subset U$，则称 A 是**局部道路连通的**.

命题 2.3 设 $A \subset \mathbf{E}^n$ 是局部道路连通的，则 A 为连通集的充要条件是 A 为道路连通的.

证明 显然，只须证明必要性. 设 $x \in A$，A_1 为 A 中所有能用 A 中的弧与 x 连接的这种点的全体. 我们断言：A_1 在 A 中是开的.

事实上，设 $y \in A_1$，$\gamma: [a,b] \to A$ 是连接 x 和 y 的弧. 因为 A 是局部道路连通的，故存在 y 在 A 中的开集 U，使 U 中任意点 $\bar{y}$ 都能用一弧 $\beta: [b,c] \to U$ 与 y 连接. 于是，A 中的弧

$$\gamma \circ \beta = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a,b] \\ \beta(t), & t \in [b,c] \end{cases},$$

连接 x 和 $\bar{y}$，即 $U \subset A_1$，所以 A_1 是 A 中的开集.

同理可证，A_1 的余集也是 A 中的开集. 于是在 A 中 A_1 既是开的又是闭的，而且由于 A 是局部道路连通的，故 A_1 非空. 由命题 2.1，$A_1 = A$，即 A 是道路连通的. 证毕.

当一个集不是连通集时，可以将它分解为若干连通分支. 为此，先看下列命题.

命题 2.4 设 $A_\alpha \subset \mathbf{E}^n$ 是一族连通集，且 $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$，则 $\bigcup_\alpha A_\alpha = A$ 是连通集.

证明 设 $A = U_1 \cup U_2$，其中 U_1 和 U_2 是 A 中不相交的非空开集，并设某点 $x \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ 属于 U_1. 设 $y \in U_2$. 由于 $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ 和 $x \in \bigcap_\alpha A_\alpha$，故存在某个 A_α 使 $x, y \in A_\alpha$. 因此 $A_\alpha \cap U_1$ 和 $A_\alpha \cap U_2$ 是 A_α 中不相交的非空开集. 这与 A_α 是连通集矛盾. 证毕.

定义 2.5 设 $A \subset \mathbf{E}^n$ 和 $x \in A$，A 中所有包含 x 的连通子集的并集，称为 A 的包含 x 的**连通分支**.

由命题 2.4，连通分支是连通集.

命题 2.5 设 $B \subset A \subset \mathbf{E}^n$ 是连通集，则 $\bar{B}$ 也是连通集.

证明 设闭包 $\bar{B} = U_1 \cup U_2$，其中 U_1 和 U_2 是 $\bar{B}$ 中不相交的非空开集. 由于 $\bar{B} \supset B$，故集 $B \cap U_1 = V_1$ 和 $B \cap U_2 = V_2$ 是 B 中不相交的开集，且 $V_1 \cup V_2 = B$. 只要证明 V_1 和 V_2 是非空的，就得出与 B 的连通性的矛盾，从而 $\bar{B}$ 是连通集.

设 $x \in U_1$. 因为 U_1 在 $\bar{B}$ 中是开的，故在 A 中存在包含 x 的一开集 W 使 $W \cap \bar{B} \subset U_1$. 由于 x 是 B 的一个聚点，故存在 $y \in W \cap B \subset W \cap \bar{B} \subset U_1$. 因此，$y \in B \cap U_1 = V_1$，即 V_1 非空. 同理可证 V_2 也非空. 证毕.

推论 2.6 集 $A \subset \mathbf{E}^n$ 的连通分支 $B \subset A$ 在 A 中是闭的.

事实上，若$\overline{B} \neq B$，则存在A的一个连通子集，即$\overline{B}$，它包含B作为真子集. 这与连通分支的极大性矛盾.

命题 2.6 设$B \subset A \subset \mathbf{E}^n$是局部道路连通集$A$的一个连通分支，则$B$在$A$中是开的.

证明 设$x \in B \subset A$. 因为A是局部道路连通的，故存在包含x的A中的道路连通开集V. 由此V是连通的. 由于B是最大的，$B \supset V$，所以B在A中是开的. 证毕.

3 紧致集

定义 3.1 若集$A \subset \mathbf{E}^n$落在$\mathbf{E}^n$的某个球中，则称A是有界的. 若$K \subset \mathbf{E}^n$是闭集且有界，则称K是$\mathbf{E}^n$中的紧致集.

定义 3.2 集$A \subset \mathbf{E}^n$的开覆盖是一族开集$\{U_\alpha\}$，$\alpha \in \mathscr{A}$，使$\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = A$. 当族中开集个数有限时，就说此覆盖是有限的. 若子族$\{U_\beta\}$，$\beta \in \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$，仍然覆盖$A$，即$\bigcup\limits_\beta U_\beta = A$，则称$\{U_\beta\}$是$\{U_\alpha\}$的一个子覆盖.

命题 3.1 对于集$K \subset \mathbf{E}^n$，以下说法是等价的：

（Ⅰ）K是紧致集.

（Ⅱ）K的每个开覆盖都有有限子覆盖.

（Ⅲ）K的任一无限子集在K中有一聚点.

证明 （Ⅰ）⇒（Ⅱ）. 设$\{U_\alpha\}$，$\alpha \in \mathscr{A}$，是紧致集K的开覆盖，并设$\{U_\alpha\}$不存在有限子覆盖. 我们要导出矛盾. 因为K是紧致的，故它被包含在一个闭的矩形区域

$$B = \{(x^1, \cdots x^n) \in \mathbf{E}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \cdots, n\}$$

中. 我们用超平面$x^i = \frac{1}{2}(a^i + b^i)$分割$B$，从而得到$2^n$个较小的闭的矩形区域. 由假设，至少存在一个矩形区域，记为B_1，使得$B_1 \cap K$不能被$\{U_\alpha\}$中的有限个开集覆盖. 对B_1重复上述过程，并以此类推，我们可得一列闭矩形区域

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_j \supset \cdots$$

使得其中没有一个 $B_j \cap K$ 能被 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集所覆盖，且 B_j 的最大边的长度趋向于零. 将每个 B_j 投影到 $\mathbf{E}^n$ 的第 i 轴上，$i = 1, \cdots, n$，便得一闭区间序列

$$[a^i_1, b^i_1] \supset [a^i_2, b^i_2] \supset \cdots \supset [a^i_j, b^i_j] \supset \cdots.$$

因为 $(b^i_j - a^i_j)$ 可任意小，故易见

$$a^i = \sup\{a^i_j\} = \inf\{b^i_j\} = b^i;$$

由此

$$a^j \in \bigcap_j [a^i_j, b^i_j].$$

所以，存在点 $x = (a^1, \cdots, a^n) \in \bigcap_j B_j$.

现在，x 的任何邻域都包含某个 B_j(j 充分大)，因而它包含无限多个 K 中的点. 因此，x 是 K 的聚点. 由于 K 是闭的，故 $x \in K$. 设 U_0 是 $\{U_\alpha\}$ 中包含 x 的一个开集. 由于 U_0 是开的，故存在一个球 $B_\varepsilon(x) \subset U_0$. 另一方面，对充分大的 j，$B_j \subset B_\varepsilon(x) \subset U_0$. 这与没有一个 $B_j \cap K$ 能被 $\{U_\alpha\}$ 中有限个开集所覆盖的假设矛盾. 因此 (Ⅰ)⇒(Ⅱ) 得证.

(Ⅱ)⇒(Ⅲ). 设 $A \subset K$ 是 K 的无限子集，且 K 中没有一点是 A 的聚点. 于是，对每个 $x \in K$ 和 $x \overline{\in} A$，可选取 x 的一个邻域 V_x 使 $V_x \cap A = \varnothing$；而对每个 $y \in A$，可选取 y 的一个邻域 U_y 使 $V_y \cap A = y$. 因此，族 $\{V_x, U_y\}$，$x \in K \backslash A$，$y \in A$，是 K 的一个开覆盖. 由于 A 是无限的，并且从这个族中去掉任何一个 U_y 都会使点 y 不被覆盖. 所以，族 $\{V_x, U_y\}$ 没有有限子覆盖. 这与(Ⅱ)矛盾.

(Ⅲ)⇒(Ⅰ). 我们要证明 K 是闭的且有界. 设 x 是 K 的一聚点，考虑同心球 $M_{1/j}(x) = B_j$，我们得到一个以 x 为极限点的序列 $x_1 \in B_1 \backslash B_2$，$x_2 \in B_2 \backslash B_3, \cdots, x_j \in B_j \backslash B_{j+1}, \cdots$. 由(Ⅲ)得 $x \in K$. 因此 K 是闭的.

K 是有界的，否则考虑半径为 $1, 2, \cdots, j, \cdots$ 的同心球 $B_j(x)$，

将得到一无聚点的序列 $x_1 \in B_1$，$x_1 \in B_2 \backslash B_1, \cdots, x_j \in B_j \backslash B_{j-1}$，$\cdots$. 这与(Ⅲ)矛盾. 证毕.

下述命题是容易证明的，留给读者作练习.

命题 3.2 设 $f: K \subset \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ 是连续映射，若 K 是紧致集，则 $f(K)$ 也是紧致集.

紧致集的重要性质之一在于下述命题.

命题 3.3 设 $f: K \subset \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^1$ 是连续函数，K 是紧致集，则存在 $x_1, x_2 \in K$，使得对一切 $x \in K$ 有

$$f(x_2) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1),$$

即 f 在 x_1 和 x_2 分别达到极大值和极小值.

证明 根据命题 3.2，$f(K)$ 是 $\mathbf{E}^1$ 中的紧致集. 因此，$f(K)$ 是有界闭集. 于是存在 $\sup f(K) = f_1$. 根据上确界的定义，容易看到 f_1 是 $f(K)$ 的聚点. 既然 $f(K)$ 是闭的，故 $f_1 \in f(K)$，即存在 $x_1 \in K$ 使 $f(x_1) = f_1$. 显然，对一切 $x \in K$，$f(x) \leqslant f_1 = f(x_1)$，即 f 在 x_1 达到极大值. 同样可证极小值的情况. 证毕.

附录B　曲面的拓扑分类

1　商空间

设 X 是 $\mathbf{E}^3$ 中的一个子集，它被分成若干不相交的子集 A_α：

$$X=\bigcup_{\alpha} A_\alpha,\quad A_\alpha \cap A_\alpha=\varnothing\ (\alpha \neq \beta).$$

如果把 X 中属于同一 A_α 的所有点称为**等价**，并把它们“**粘合**”成一点 a_α（即把相互等价的点的全体 A_α 看成一点），则得一新集 $Y=\bigcup_{\alpha} a_\alpha$，它称为关于上述等价关系的**商集**．注意，此时 Y 不是 X 的子集．一般来说，也不再与 $\mathbf{E}^3$ 的度量发生关系．

使用这种粘合方法可得到不少熟知的曲面．例如，设 X 为一矩形（图 B-1），若将边 ab 和 cd 的同一水平线上的点“粘合”起来，则得到一个称为**柱面**的商集．若将 ab 和 dc 上关于矩形中心 O 对称的点“粘合”起来，则得到称为 Möbius 带的商集．

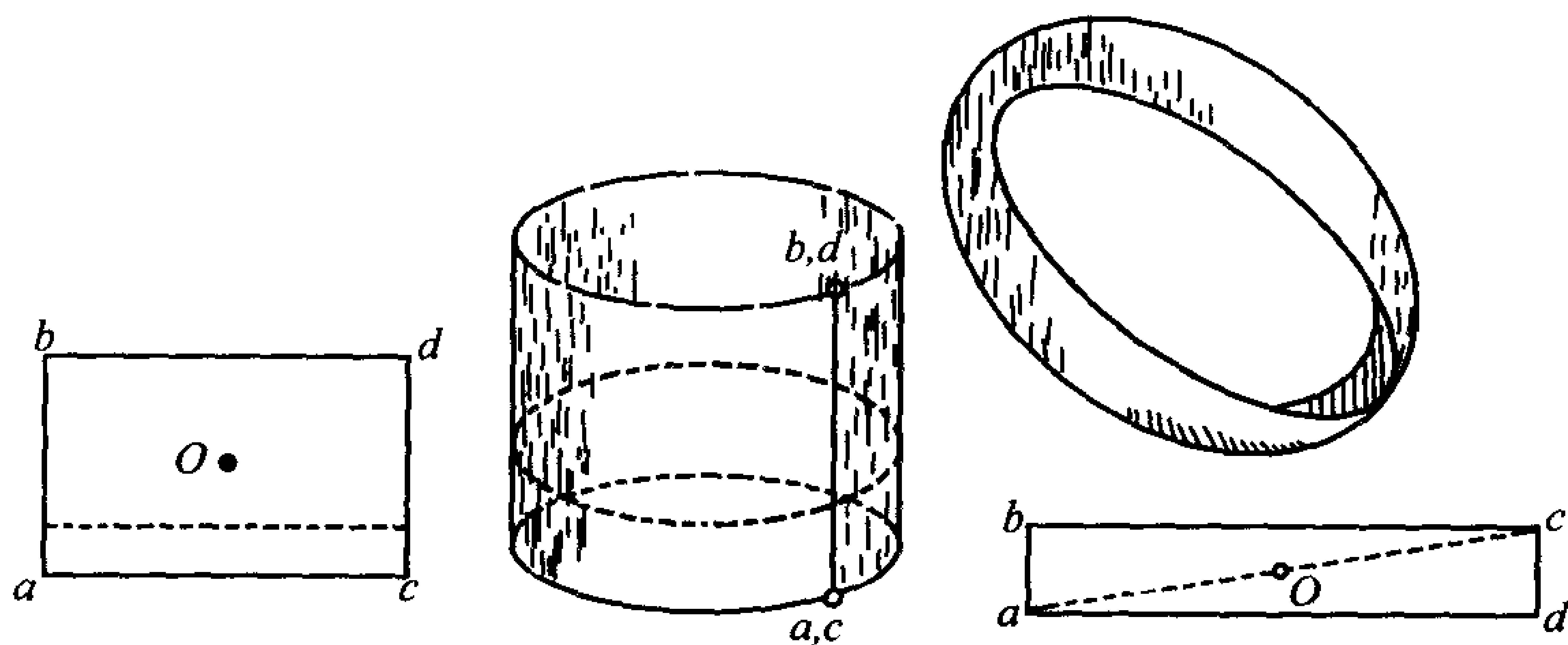


图 B-1

若在带 $abcd$ 上将边 ab 与 cd 的同一水平线上的点粘合在一起，再将边 bd 与 ac 的同一水平线上的点粘合在一起，则得到环面(图 B-2).

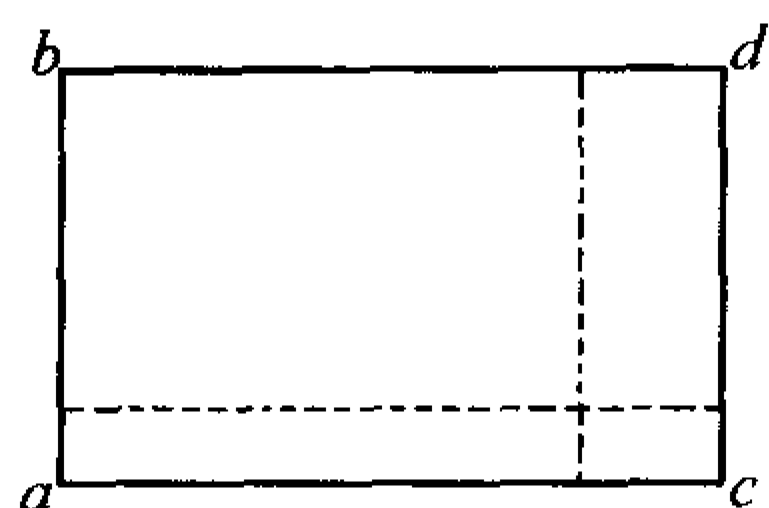


图 B-2

若分别将边 ab,cd 及 bd,ac 上关于中心 O 对称的点粘合在一起(图 B-3)，则所得商集将无法在 $\mathbf{E}^3$ 中实现. 这种"曲面"自相贯穿但自身不相交. 要把这种"曲面"放到 $\mathbf{E}^3$ 中去，只有将它适当地"撕开". 但这就违背了通常要求的粘合的"连续性"原则(即等价点邻近的点在粘合后仍变成邻近的点). 这样得到的商集称为射影平面，记为 $\mathbf{RP}^2$. 由于矩形 $abcd$ 与边界为 $abcd$ 的圆盘同胚，故 $\mathbf{RP}^2$ 又可看成由圆盘粘合其边界上的对径点而得(图 B-3).

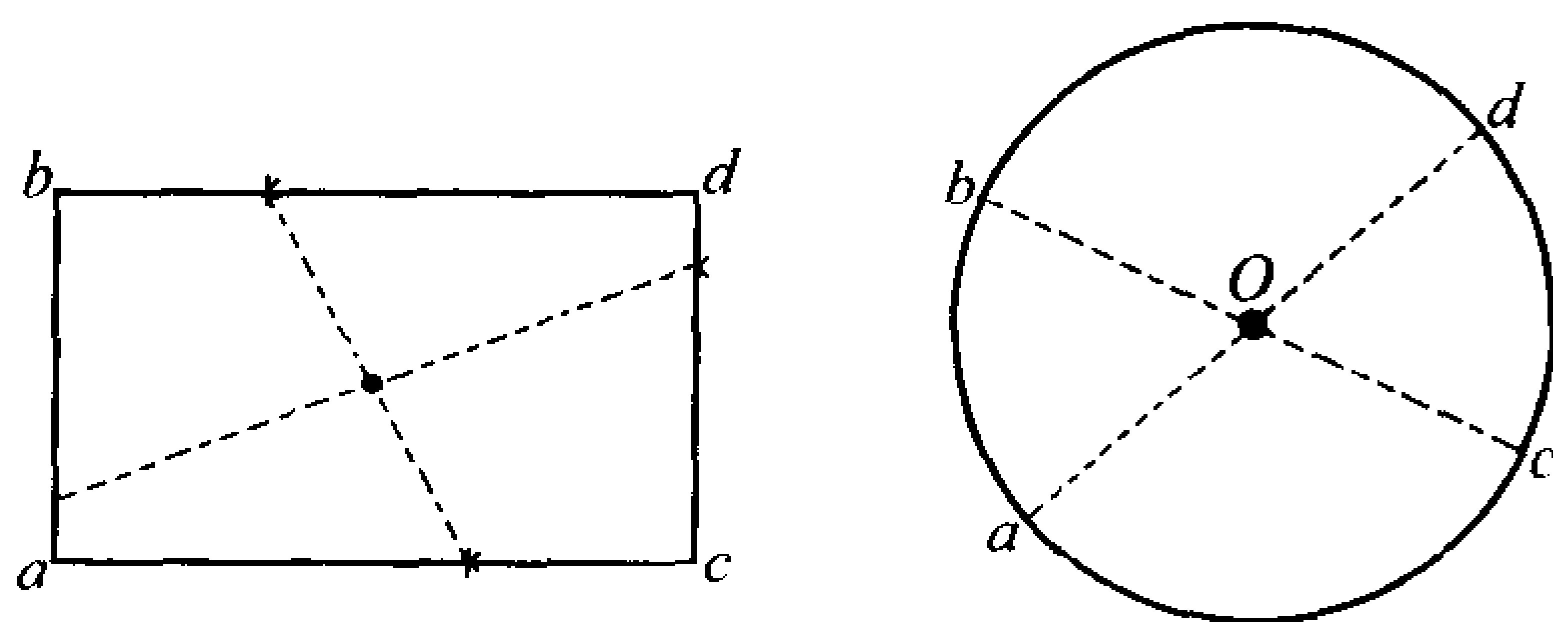


图 B-3

上面的实例导致下面的抽象定义.

定义 1.1 设 X 是一抽象集合，X 中某些元素 x,y 之间定义了一种关系 $x \sim y$. 如果这种关系满足下列性质：(Ⅰ)对任意 $x \in X$, $x \sim x$(反身性)；(Ⅱ)若 $x \sim y$，则 $y \sim x$(对称性)；(Ⅲ)若 $x \sim y$, $y \sim z$，则 $x \sim z$(传递性)，则 $\sim$ 称为等价关系. X 被分成不交的等价元素类，称为等价类.

定义 1.2 所有等价类的集合 $\{A_\alpha\}$ 记为 $X/\sim$，它称为 X 关

于等价关系 $\sim$ 的商集.

定义1.3 设 X 为一拓扑空间，X 中存在等价关系 $\sim$，在商集 $X/\sim$ 中引进如下的自然拓扑：由元素 A_α 组成的子集 $V \subset \{A_\alpha\}$ 是开集，当且仅当这些集合 A_α 的并 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 作为 X 的子集时是 X 中的开集. 空集也算开集. 这个拓扑称为商拓扑，具备商拓扑的商集称为商空间.

设 X,Y 是两拓扑空间，$\sim$ 和 $\approx$ 分别为 X,Y 上的等价关系. 考虑映射 $f: X \to Y$. 若由 $x \sim y$ 可推出 $f(x) \approx f(y)$, $x,y \in X$，则称 f 保持等价关系. 对于这样的映射，可自然地确定商空间之间的一个映射 $\hat{f}: X/\sim \to Y/\approx$ 如下. 设 $[x]$ 为 X 中包含 x 的一等价类，若 Y 中包含 $f(x)$ 的等价类为 $[f(x)]$，则 $\hat{f}([x]) = [f(x)]$. 不难证明，若 f 是连续映射，则 $\hat{f}$ 也是连续映射. 而且还有

命题1.1 若 $f: X \to Y$ 是同胚，映射 f 和 f^{-1} 保持等价关系，则 $\hat{f}: X/\sim \to Y/\approx$ 是同胚.

证明留给读者作练习.

现在再看一些由图形"粘合"而成的商空间. 考虑如图 B-4 所示的五边形的边的粘合. 图中箭头表示相应边的粘合方式(一有向线段的起点与另一有向线段的起点粘合，终点与终点粘合)，记号 a, a^{-1} 是指在认同等价点时必须沿顺时针方向通过多边形的边界 a，沿逆时针方向通过边界 a^{-1}(换言之，必须按相反的方向粘合这两边). 上述粘合图形可形式地记为 $aba^{-1}b^{-1}c$. 不难看出，这个商空间还可由其他的拓扑等价方法得到(图 B-4，中图). 这个商空间还可被表示为带有一切口(曲线 c)的环面(图 B-4，右图，其中虚线代表 aa^{-1} 和 bb^{-1} 的粘合线). 这个带切口的环面叫环柄.

再考虑三角形相邻两边的粘合，若这两边的定向相反，即粘合图为 $aa^{-1}c$(图 B-5)，则其商空间拓扑等价于一个带孔的球面. 若这两边的定向相同，即粘合图为 aac(图 B-6)，则可将此三角形看

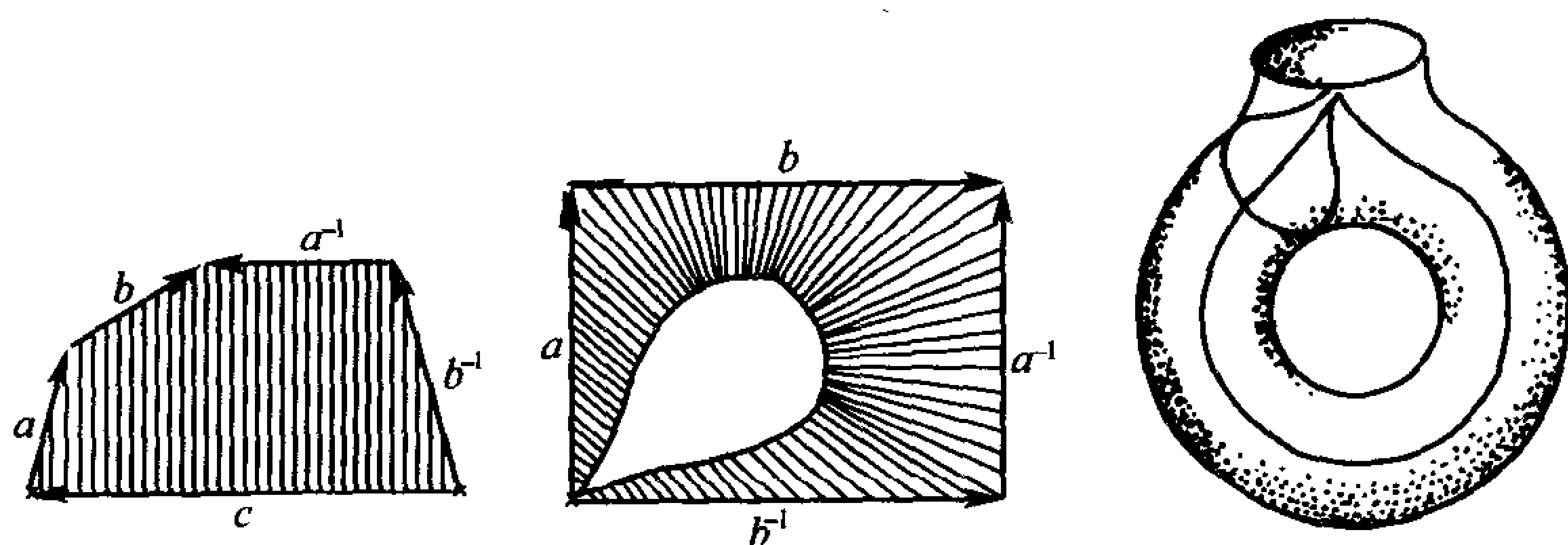


图 B-4

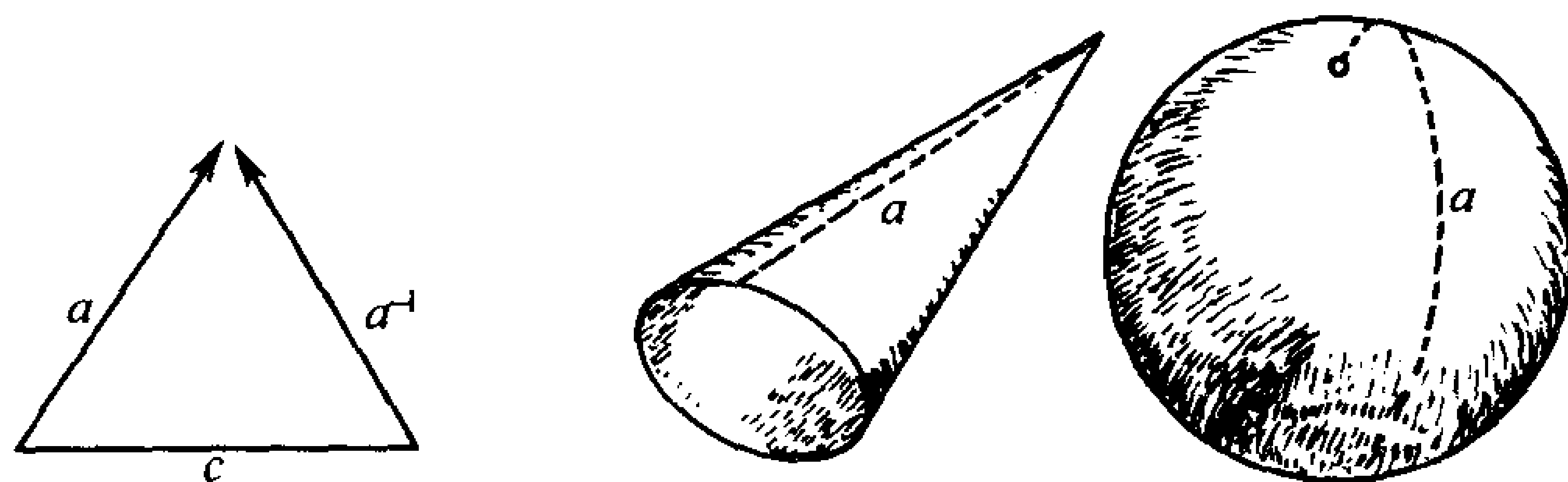


图 B-5

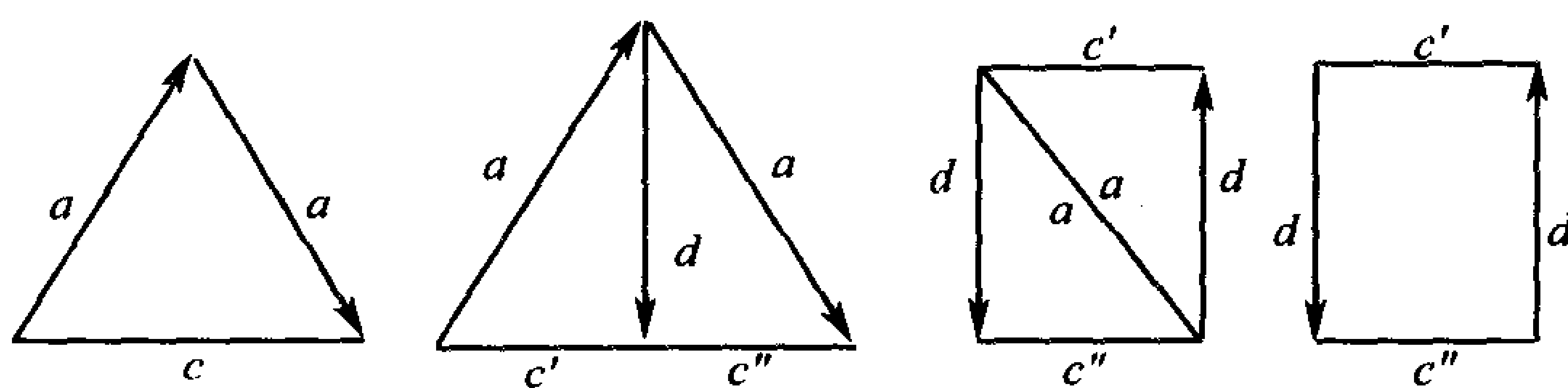


图 B-6

成由两个具有所示定向的公共高 d 的直角三角形粘合而成. 改变这两个三角形的粘合次序,先粘合斜边 a,再粘合直角边 d,于是就得到 Möbius 带(比较图 B-1). 最后这个商空间和原来的三角形同胚.

现在，在球面 S^2 上切开一小口，然后在这带孔的 S^2 上沿切口边界 C（可看成圆周 S^1）粘上一个环柄或 Möbius 带，则在前一种情况下得到环面；在后一种情况下得到射影平面 $\mathbf{RP}^2$，见图 B-7. 事实上，射影平面（见图 B-3）拓扑等价于如图 B-7 右边所示的商空间，因为图中上边的"帽子"就是带有边界 c 的 Möbius 带.

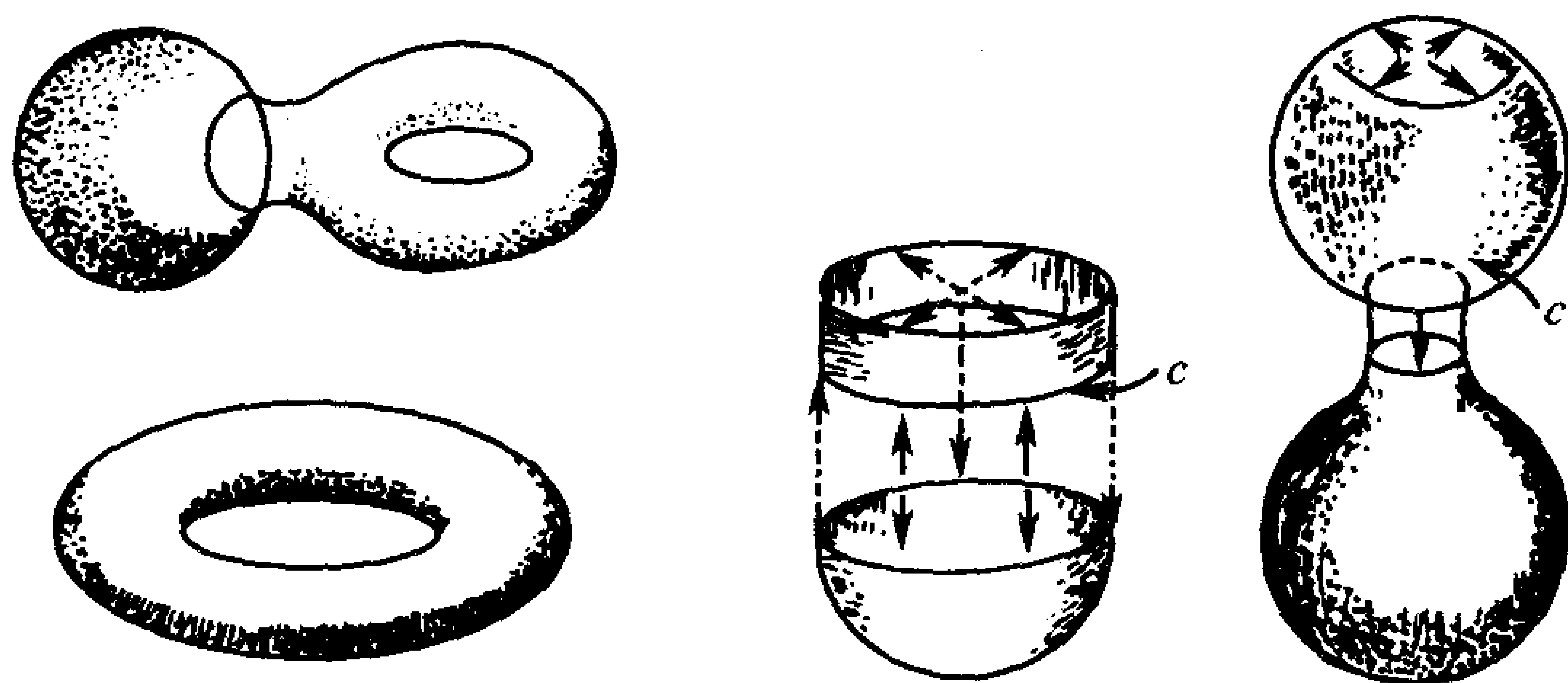


图 B-7

进一步的构造可用两种方式进行：(1) 在 S^2 上切开 p 个小口，并且粘合上 p 个环柄；(2) 在 S^2 上切开 q 个小口，并且粘合上 q 个 Möbius 带. 这样，就得到下面两系曲面：

$$\begin{aligned} &M_0, M_1, \cdots, M_p, \cdots; \\ &N_0, N_1, \cdots, N_q, \cdots. \end{aligned} \tag{1}$$

显然 M_0 和 N_0 就是球面 S^2.

下面我们将证明，每个闭曲面都和某个 M_p 型或 N_q 型曲面同胚. 数 p 和 q 称曲面的**亏格**. 于是，曲面系(1) 给出了闭曲面的一个完全的拓扑分类. 若在 S^2 上挖 $p+q$ 个小孔，再粘上 p 个环柄及 $q \geqslant 1$ 个 Möbius 带，则所得曲面将拓扑等价于粘合上 $2p+q$ 个 Möbius 带的球面.

2 曲面的展开图

定义 2.1 设 A 是拓扑空间 X 的一个子空间，$f:\triangle\to A$ 为某平面三角形 $\triangle$ 到 A 上的一个同胚，(A,f) 称为 X 上的一个拓扑三角形.

若同胚 $f:\triangle\to A$ 已确定，则就简称子空间 $A\subset X$ 为拓扑三角形. $\triangle$ 的顶点、边的像(连同 f 在其上的限制)相应地称为拓扑三角形 A 的顶点和棱.

由 $\triangle$ 的顶点可以组成不同的有序三点组. 若一个三点组可由另一个三点组经过循环置换而得到，则把这两个三点组看成是等价的. 显然这样的等价类恰有两个. 若固定两等价类中的一个，则三角形 $\triangle$ 就已定向了. 当 $\triangle$ 已定向时，拓扑三角形 (A,f) 也随之定向. 显然，三角形的定向也决定了它的棱(作为有序的顶点偶)的定向. 注意，三角形的定向相当于给出其顶点的确定的环绕方向(按顺时针方向或逆时针方向). 由此，对 $n(>3)$ 边形及其棱的定向，可通过给出其顶点的环绕方向而完全类似地确定.

定义 2.2 二维流形是一个拓扑空间，使得它的每点处都有一个同胚于开圆盘的邻域. 二维流形 X 的一个三角剖分是 X 上具有以下性质的拓扑三角形的有限集合 $K=\{(A_i,f_i)\}_{i=1}^k$：(Ⅰ) $X=\bigcup_{i=1}^k A_i$；(Ⅱ) K 中任意两个三角形若有非空的交，则交是它们的公共顶点或者公共棱. 若流形存在一个三角剖分，则称它为可三角剖分的.

若 K 中三角形的任意两个顶点都有由棱构成的道路把它们连接起来，则称 X 是连通的. 图 B-8 给出球面 S^2 的一个三角剖分，它由八个三角形组成.

定义 2.3 连通的可三角剖分的二维流形称为闭曲面.

设 (A_i,f_i) 和 (A_j,f_j) 是 K 中两个三角形，$A_i\cap A_j=a$ 是它们

的公共棱. 设 $a_i = f_i^{-1}(a)$ 和 $a_j = f_j^{-1}(a)$ 是 Δ_i 和 Δ_j 中相应的边. 定义粘合同胚为

$$f_{ij} = (f_j^{-1}|_a) \circ (f_i|_{a_i}): a_i \to a_j.$$

于是,可使三角剖分 K 与平面三角形及相应边偶之间的同胚 f_{ij} 的族 $\Delta = (\{\Delta_i\}_{i=1}^k, \{f_{ij}\})$ 相对应. 令 $\bigcup_{i=1}^k \Delta_i$ 中在同胚 f_{ij} 下互相对应的点为等价点,并记此等价关系为 $\sim$.

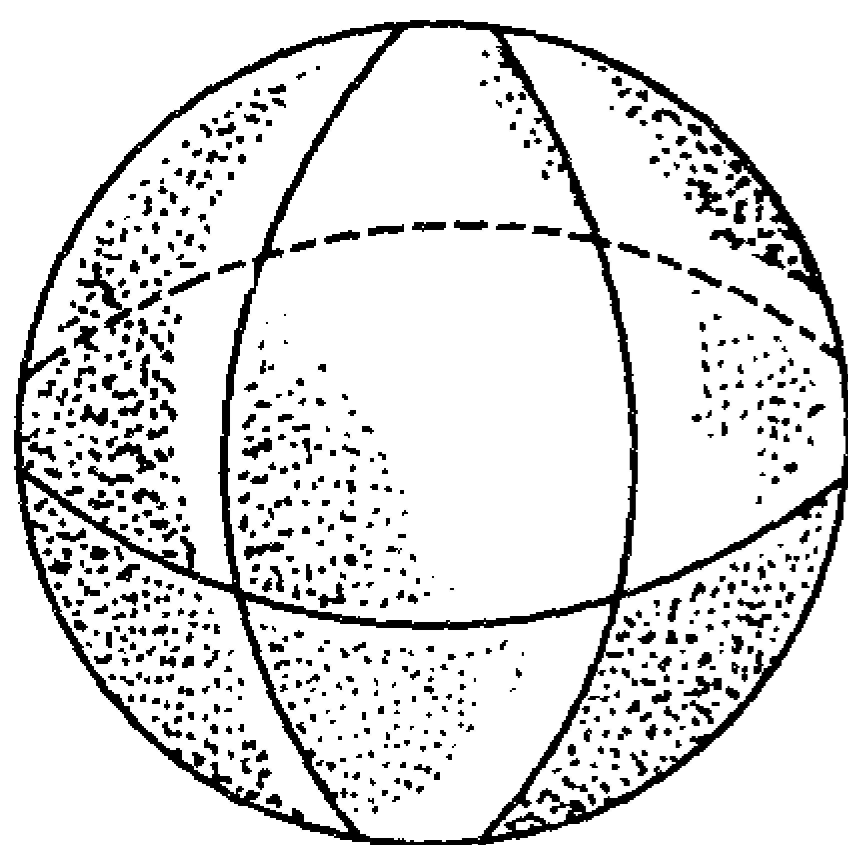


图 B-8

命题 2.1 商空间 $(\bigcup_{i=1}^k \Delta_i)/\sim$ 同胚于曲面 X.

证明 同胚 $f_i: \Delta_i \to A_i$ 自然地诱导了一个满映射 $F: \bigcup_{i=1}^k \Delta_i \to X$, 对任意 $x \in X$, 原像 $F^{-1}(x)$ 恰好就是一个等价点类. 由命题 1.1 前的叙述,商映射 $\hat{F}: (\bigcup_{i=1}^k \Delta_i)/\sim \to X$ 为连续映射. 显然它是双射,并且逆映射 $\hat{F}^{-1}$ 连续. 证毕.

定义 2.4 族 $Q = (\{Q_i\}, \{f_{ij}\})$ 叫做一个**展开图**,其中 $\{Q_i\}$ 表示有很多个不相交的平面多边形的族, $\{f_{ij}\}$ 表示有限多个棱偶的粘合同胚的族,并且每条棱只与一条棱粘合,也可将同一多边形的两条棱粘合起来.

显然,族 $\Delta = (\{\Delta_i\}, \{f_{ij}\})$ 是一个展开图,称为曲面 X 关于三角剖分 K 的展开图.

对于任意展开图 Q, 考虑 $\bigcup_i Q_i$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间 $\hat{Q} = (\bigcup_i Q_i)/\sim$, 其中 $\sim$ 由同胚 f_{ij} 确定. $\hat{Q}$ 称为展开图 Q 的商空间. 显然, $\hat{Q}$ 是二维流形,它允许由多边形 Q_i 的适当细的三角剖分所产生的一个三角剖分. 这样,若 $\hat{Q}$ 连通,它就是一个闭曲面,这时 Q 是曲面 $\hat{Q}$ 的展开图. 商映射导致曲面 $\hat{Q}$ 的一个分解,它由多边形的

像、边的像（分解的棱）以及顶点的像（分解的顶点）组成．一般说，分解不是三角剖分．图 B-9 是用多边形表示的环面展开图，其中边上的箭头和记号表明了环面的粘合方式．

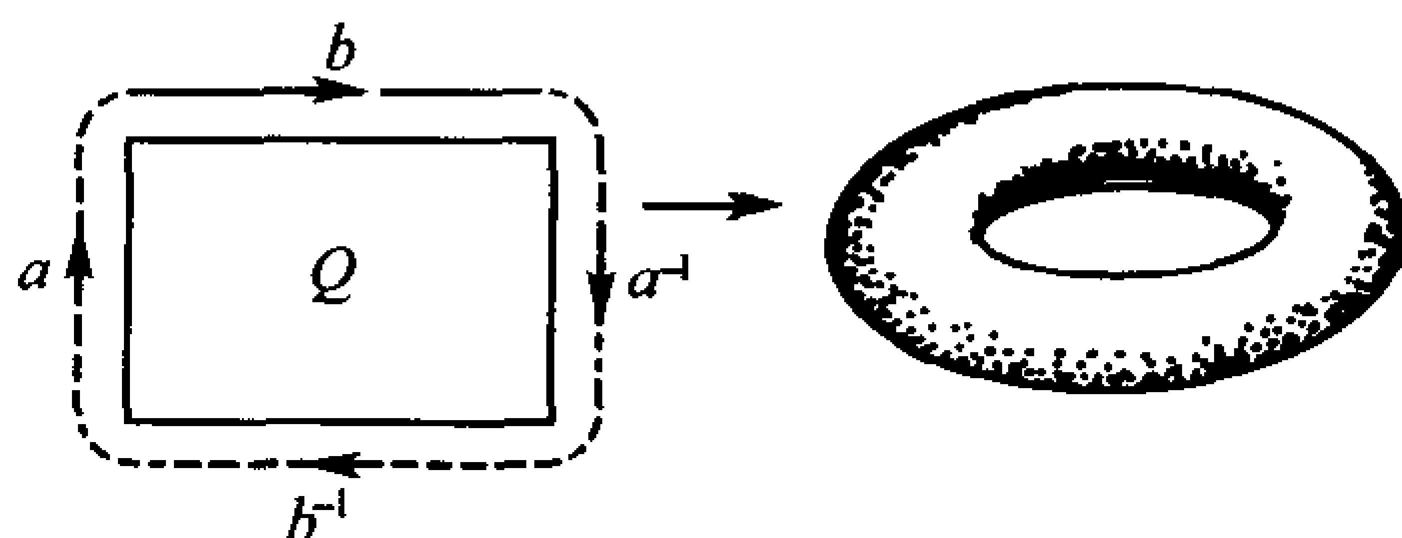


图 B-9

多边形的定向决定了边的相应的定向．在两条边的粘合同胚 $f_{ij}: a_i \to a_j$ 之下，边 a_j 通过 f_{ij} 由边 a_i 的定向诱导一个定向，一般来说，此诱导定向可能与边 a_j 的定向不同．

定义 2.5 一个展开图 Q，如果在它的所有多边形的同一定向下，边的粘合同胚在其像上诱导出相反的定向，则称 Q 为可定向的；反之（即至少有一条边，它的定向与诱导定向相同），称为不可定向的．若曲面 X 的展开图是可定向（不可定向）的，则称 X 是可定向（不可定向）的．

3 展开图的分类

定义 3.1 两个展开图 Q 与 Q' 的商空间如果同胚，则称 Q 和 Q' 等价．

现在引入展开图上的一些基本运算．

重分 设展开图 Q 中有一个 $n(>3)$ 边形 Q_i，任意作它的一条对角线 d，将多边形 Q_i 分成两个多边形 Q'_i 与 Q''_i．分开 Q'_i 与 Q''_i，用它们代替 Q_i，则得出一新的展开图 Q^*．此时，两条新的边 d' 与 d''（对角线 d 的拷贝）由自然同胚（恒同）相关联，其他边上的同胚保持不动．展开图 Q^* 称为展开图 Q 的一个重分．显然，它们是

等价的.

粘合(合并)　它是上述运算的逆运算. 展开图 Q 的两个多边形 Q'_i 与 Q''_i 按它们的边 d' 与 d'' 之间的一个同胚粘合成一个多边形 Q_i,而 Q'_i 与 Q''_i 的其他的同胚诱导出 Q_i 的边的同胚.

卷缩　设在多边形 Q_i 中有两条相邻的边的定向相反,粘合这两条边就得到一个新展开图,其中代替 Q_i 的是一个多边形,其顶点数较 Q_i 少 2,边的同胚数少 1(参见图 B-10).

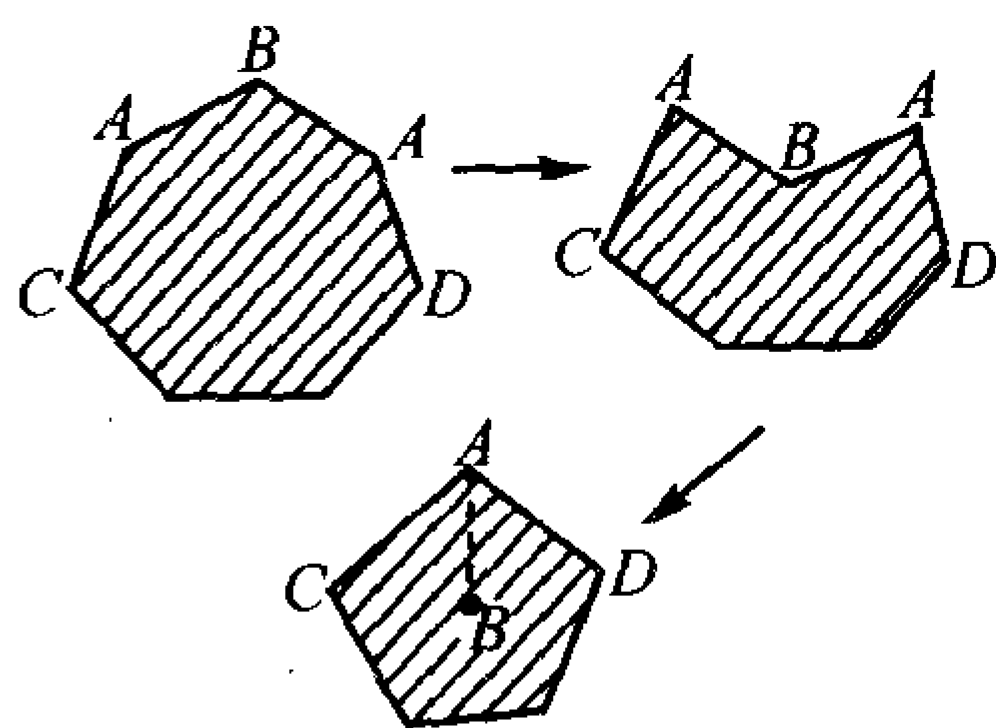


图 B-10

不难看出,上述运算保持展开图的等价性.

现在引入一些专门符号来表述展开图. 设已给任一展开图 $Q=(\{Q_i\},\{f_{ij}\})$,并给定了每一多边形的定向(顶点环绕方向). 每个多边形 Q_i 的任一条边按如下法则用字母标出:设对于某一对边给定同胚 f_{ij},用 a 表示其中一条边,考察在 f_{ij} 下第二条边的诱导定向与第二条边的原来定向是否一致. 若它们一致,则第二条边也记为 a;若不一致,则记为 a^{-1}. 凡不与 a 粘合(同胚)的边一律用其他字母表示. 在第 1 节中已陈述如何按此法则用字母表示五边形及三角形的边,以便得出环柄或 Möbius 带的展开图.

在这样的标记下,我们可得一个字母串的组合 $\{\omega(Q_i)\}$,其中字母串 $\omega(Q_i)$ 表示多边形 Q_i 的"粘贴"方式. 此时,$\omega(Q_i)$ 中的字母按下述顺序写出:Q_i 的边依各自的定向顺次环绕一周. 显然,这样的字母串组 $\{\omega(Q_i)\}$ 确定了展开图 Q. 下面定义展开图的两种基本类型.

定义 3.2　由一个形如

$$aa^{-1} \text{ 或 } a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}\ (m>0)$$

的字母串所确定的多边形构成的展开图称为Ⅰ 型标准展开图.

定义 3.3 由一个形如 $a_1a_1a_2a_2\cdots a_ma_m(m>0)$ 的字母串所确定的多边形构成的展开图称为Ⅱ 型标准展开图.

一个基本结果是下列分类定理.

定理 3.1 每个展开图根据它是否可定向而相应地等价于 Ⅰ 型或 Ⅱ 型标准展开图.

证明 首先注意,利用合并总可以把曲面 X(对于三角剖分 K) 的展开图变为仅由一个多边形构成的展开图. 因此,我们只要考虑这样的展开图. 其次,若展开图的字母串不同于 aa^{-1},但其中有形如 aa^{-1} 的组合,则可以利用对 a 与 a^{-1} 的公共顶点 A 施行卷缩运算而逐步消去这些组合. 新展开图的字母串就是从老展开图删去 aa^{-1} 而得.

这样,或者得到两个字母的字母串(aa^{-1} 或 aa),或者得到不少于四个字母的字母串,其中不含形如 aa^{-1} 的组合(注意,曲面是闭的). 因为字母串 aa^{-1} 或 aa 已经是标准展开图,所以下面只要考虑第二种情况. 我们分几步来讨论.

(1) 我们可以把展开图 Q' 变为这样的展开图,它的所有顶点都等价,即在商映射下它的所有顶点都粘合在一起. 事实上,假设 Q' 中有不等价的顶点,则在 Q' 中必存在一条边 a,它的两端点 A 与 B 不等价. 设 b 是与顶点 B 相连的另一条边,它的第二个端点为 C. 用对角线 d 连接 A,C. 此时,在 $\triangle ABC$ 之外必有一条边 b' 能与 b 粘合. 如若不然,则或 $b=a$,这与 A,B 不等价矛盾;或 $b=a^{-1}$,此与不存在形如 aa^{-1} 的组合矛盾. 现在对 d 进行重分,再对边 b 作合并(粘合 b 与 b'). 在这样得到的展开图 Q'' 中,与 A 等价的顶点变多了一点,而与 B 等价的顶点变少了一点(图 B-11). 若此时展开图 Q'' 的字母串中出现了形如 aa^{-1} 的组合,则就用卷缩运算消去它们. 这样的变换,与 B 等价的顶点数和与 A 等价的顶点数之差不变.

现在若还有与 A 不等价的顶点,则可重复上述做法,直至得到

所要求的展开图为止.

因此,以下我们总认为在所讨论的展开图中,所有顶点都等价,并且它的字母串中不出现形如 aa^{-1} 的组合.

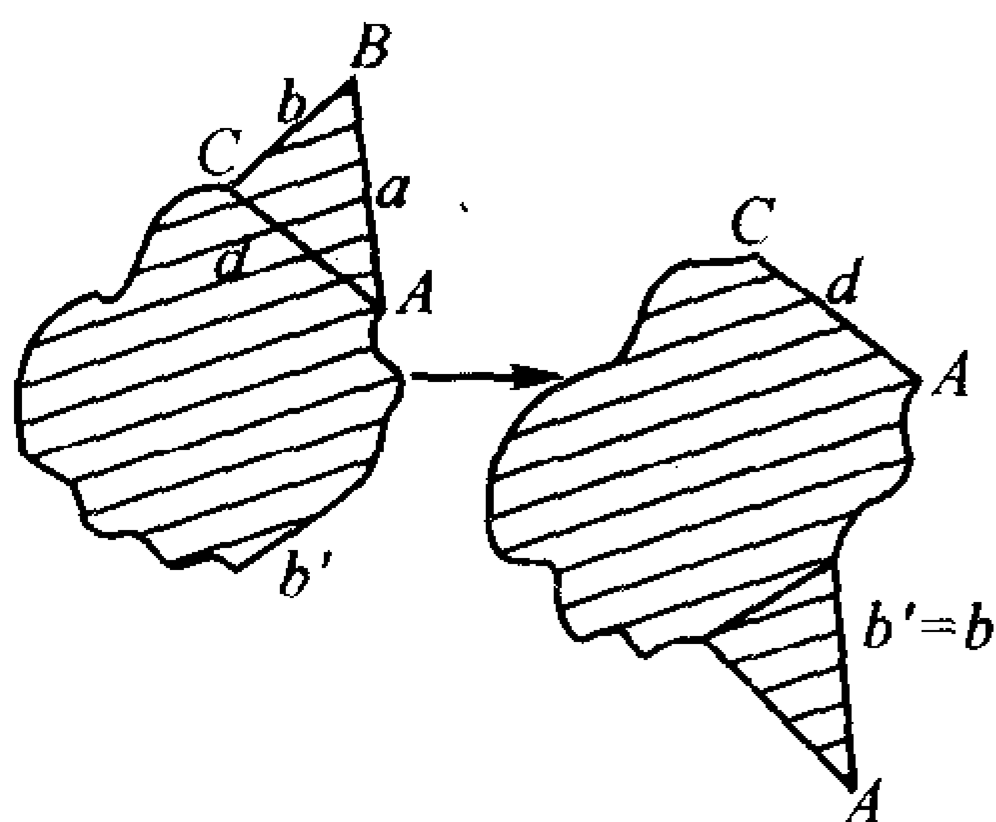


图 B-11

(2) 现在证明,在一个展开图的字母串中,两个相同的字母可以并排放置. 事实上,设字母 a 与 a 不并排在一起,则可引多边形的一条对角线 d 连接 a 与 a 的起点. 用 d 做重分,然后再对 a 做合并. 这样,在新的字母串中,a 已不复存在,但出现了组合 dd. 这正是我们所希望的(图 B-12).

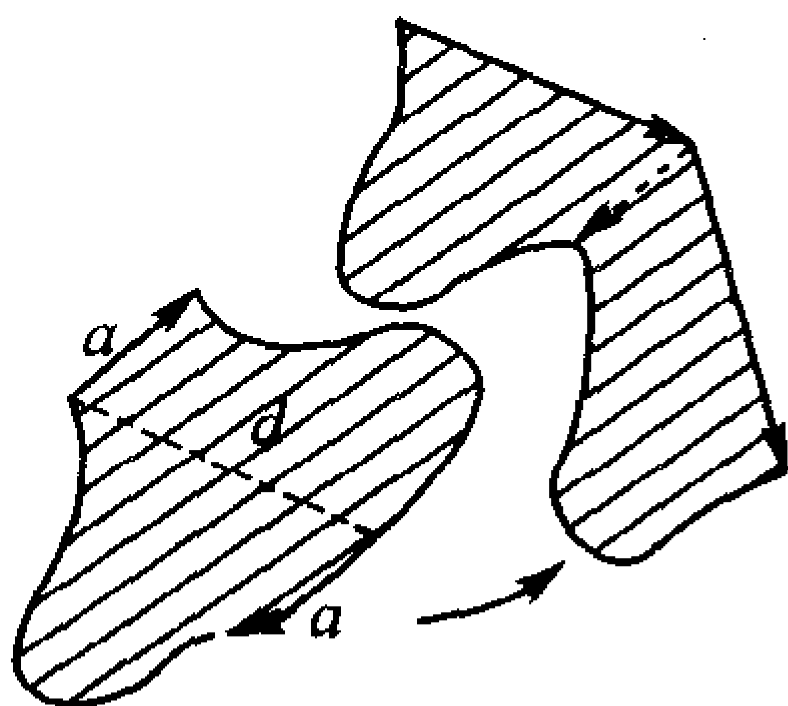


图 B-12

在上述做法中,不会将其他的形如 aa 的组合分开,因为它仅仅把与 a 相邻的边分开了,而这些边显然与 a 不等价.

(3) 假定(1) 和(2) 步已做到,我们证明,若字母串中字母 a 与 a^{-1} 不并排在一起,则存在字母 b 与 b^{-1},使 a,a^{-1},b 和 b^{-1} 彼此隔开(图 B-13).

用反证法. 若不存这样的 b 与 b^{-1},则在 a 与 a^{-1} 之间仅含有形如 cc 的组合,但这就与展开图中所有顶点都等价相矛盾,因为只有在边 a 的顶点 A,B 不等价时才能这样(图 B-14).

(4) 对于两对彼此隔开的字母 a,a^{-1},b 和 b^{-1},我们证明,它们总可以用形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的组合来代替,并且(1) 与(2) 步的要求仍保持. 用对角线 x 连接边 a 与 a^{-1} 的起点,并用它作重分,再将 b 合并起来(图 B-15). 在所得的多边形中,以对角线 y 连接 x 与 x^{-1} 的终点,并用 y 作重分,最后再对 a 作合并(图 B-16).

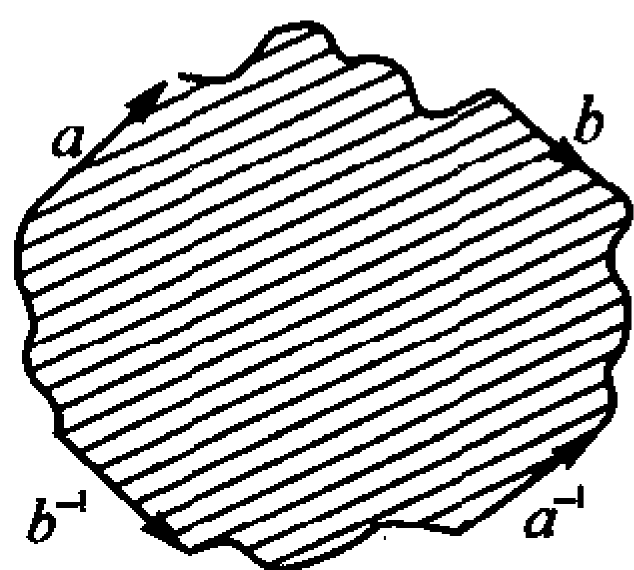


图 B-13

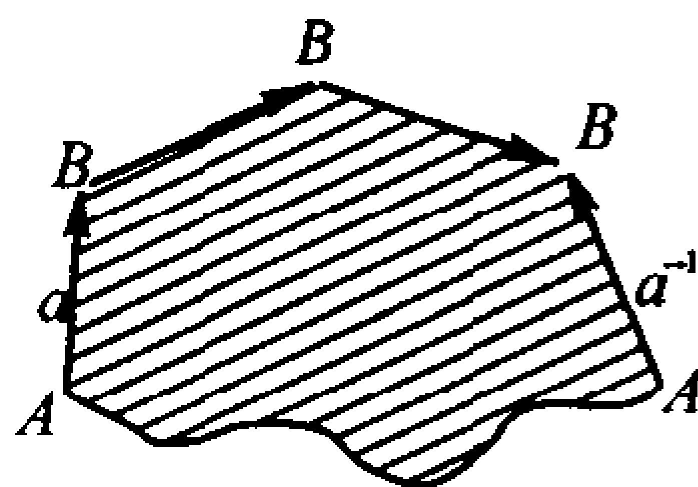


图 B-14

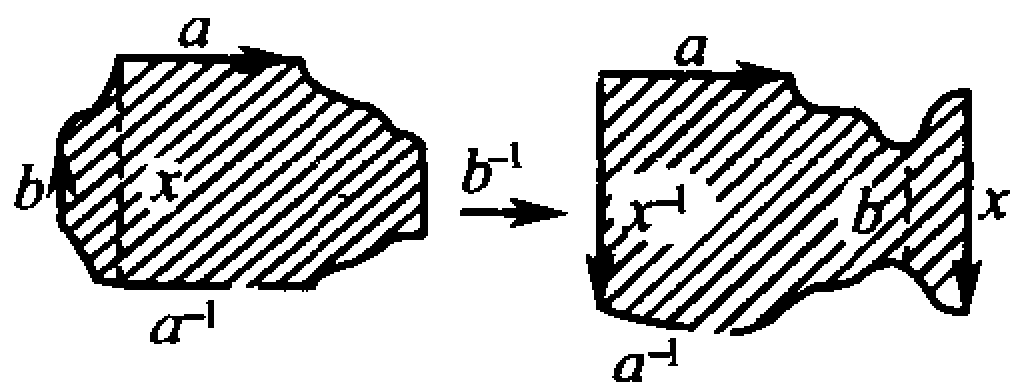


图 B-15

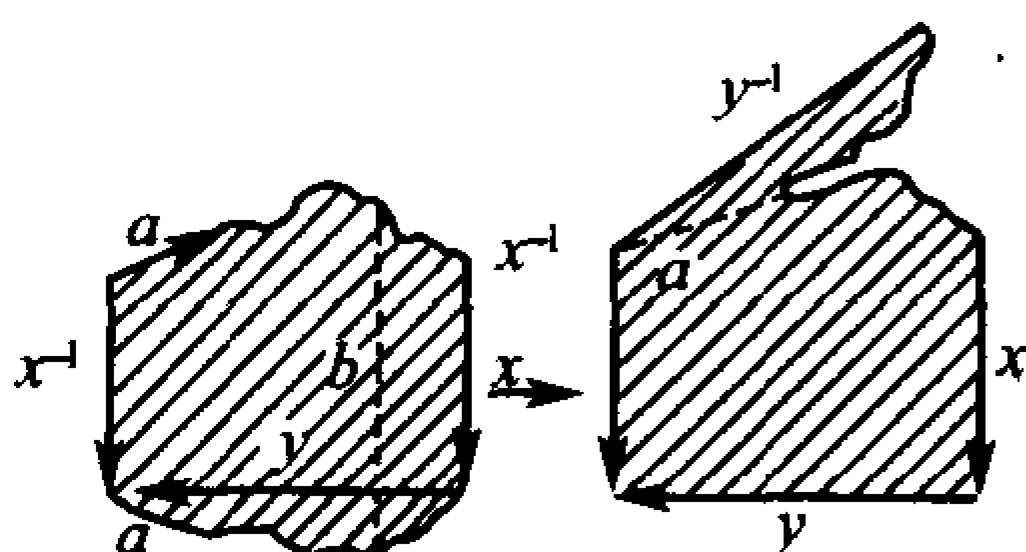
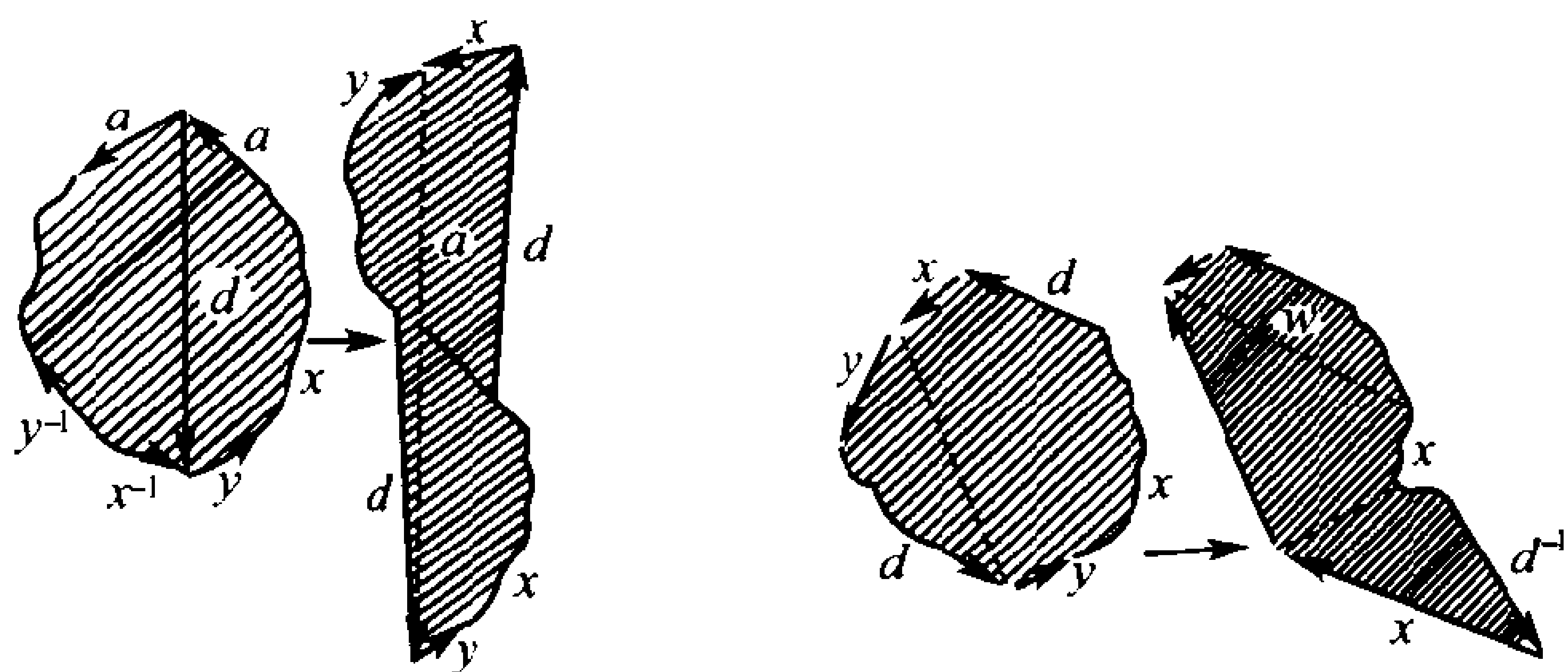


图 B-16

在所得展开图的字母串中，代替 a,b,a^{-1},b^{-1}，出现了组合 $xyx^{-1}y^{-1}$. 若在这些运算下，出现了形如 cc^{-1} 的组合，则可用卷缩运算消去，而形如 dd 和 $cdc^{-1}d^{-1}$ 的组合不受影响. 因此，(1) 与 (2) 步的结果仍被保持.

利用上面的步骤(1) ～ (4)，我们就可将原来的字母串变成由形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 及 aa 的组合所构成的字母串. 若在这个字母串中没有形如 aa 的组合，那么它就是 Ⅰ 型标准展开图了.

(5) 若字母串中同时有形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 和 aa 的组合，则可用如下方法把它变为 Ⅱ 型标准展开图. 用对角线 d 将边 a,a 的公共顶点与边 y,x^{-1} 的公共顶点连接起来，以 d 做重分，再沿 a 做合并(图 B-17). 利用第(2) 步的做法，把所得的两对不相邻的边对 x,x 及 y,y 变为形如 zz 及 ww 的组合(图 B-18). 这样就得到了所要求的标准型.

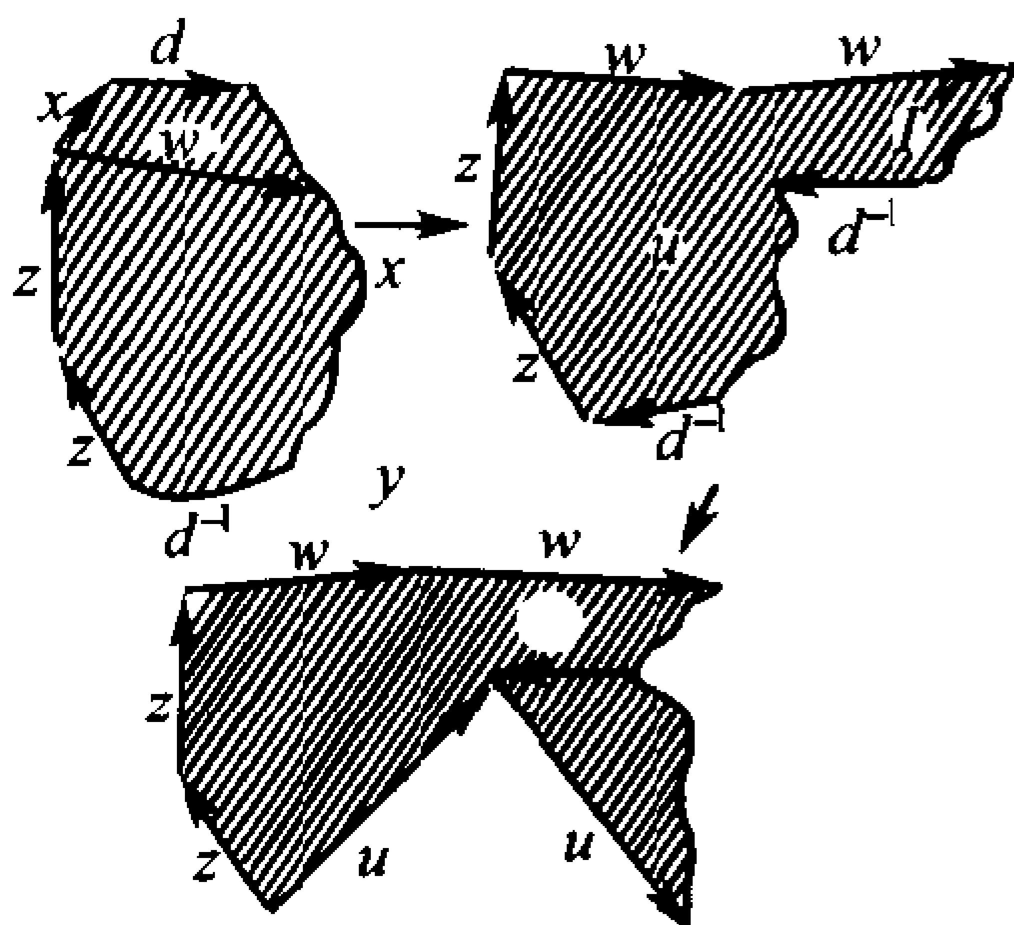


B-17

因此，字母串中 $xyx^{-1}y^{-1}$ 及 aa 组合就被三对形如 aa 的组合所代替，而其他形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 及 aa 的组合没有改变. 重复这样的过程，直到字母串中形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的组合全部消失为止.

定理 3.1 完全证毕.

不难证明，若两闭曲面 X, X' 的展开图属于同一标准型，并且相应的数 m 相等，则 X, X' 同胚.



B-18

4　闭曲面的拓扑分类

在第 1 节中曾指出，曲面 X 的标准展开图的字母串中，形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的组合相当于在曲面的其余部分上沿其边界粘合上一个环柄；而形如 aa 的组合相当于粘合上一个 Möbius 带. 因此，曲面的标准展开图为 Ⅰ 型或 Ⅱ 型，相当于这个曲面是由有限多个环柄或 Möbius 带粘合而成. 这种粘合拓扑地等价于在球面 S^2 上粘合有限多个环柄或 Möbius 带.

于是，具有 Ⅰ 型标准展开图的曲面为可定向的 M_p 型曲面，其中 p 为粘合到 S^2 上的环柄数(称为曲面的亏格). 具有 Ⅱ 型标准展开图的曲面为不可定向的 N_q 型曲面，其中 $q(\geqslant 1)$ 是粘合到 S^2 上的 Möbius 带的个数(也称为曲面的亏格). 在定理 3.1 的证明过程中已证明，若同时在 S^2 上粘合上 p 个环柄及 $q(\geqslant 1)$ 个 Möbius 带，则相当于粘合上 $2p+q$ 个 Möbius 带，从而曲面为不可定向的 N_{2p+q} 型曲面.

从展开图的分类定理 3.1，可得结论：任何闭曲面必与某个 M_p 型或 N_q 型曲面同胚.

定义 4.1 设曲面 X 的一个分解中包含 α_0 个顶点，α_1 条边，α_2 个多边形. 数

$$\chi(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

称为曲面 X 的Euler 示性数.

若 X 是 M_p 型曲面，P 是它的标准展开图，其字母串为 $a_1b_1a^{-1}b^{-1}\cdots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$，则显然有 $\alpha_0=1$，$\alpha_1=2p$，$\alpha_2=1$. 于是 $\chi(X)=2-2p$.

若 X 是 N_q 型曲面，$\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\cdots\alpha_q\alpha_q$ 是它的标准展开图的字母串，则 $\alpha_0=1$，$\alpha_1=q$，$\alpha_2=1$. 于是 $\chi(X)=2-q$.

对于曲面 X 的任一展开图 Q，可施行基本运算将它变为标准展开图. 易见基本运算不改变 $\chi(X)$. 事实上，在 α_0 不变的条件下，重分时 α_1,α_2 各增加 1，合并时 α_1,α_2 各减少 1，从而 $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ 不变.

由此得出一个重要结论：标准展开图 P 与展开图 Q 的基本变换无关.

事实上，若 Q 能化为两个标准展开图 P 和 P'(比如都是 Ⅰ 型)，则对于 Q 的分解算出的 Euler 示性数和对于 P 和 P' 的分解算出的 Euler 示性数相同，因而有 $2-2p=2-2p'$，即 $p=p'$. 当 P

和 P' 同为 Ⅱ 型时,情况也一样.因此,P 和 P' 的字母串是一样的.

若 P 为 Ⅰ 型展开图而 P' 为 Ⅱ 型展开图时,则等式 $2-2p=2-q$ 只有在 $q=2p$ 时才成立.另一方面,在初等变换下展开图的可定向性是保持不变的,因此,这样的情况不可能发生.

综上所述,我们已证明了下面的分类定理.

定理 4.1 每个闭曲面根据它是否可定向而相应地拓扑等价于 M_p 型或 N_q 型曲面,其中 p(或 q)由曲面的 Euler 示性数完全确定.

因为 $\mathbf{E}^3$ 中的紧致闭曲面总是可定向的,故得

推论 4.2 $\mathbf{E}^3$ 中每个紧致闭曲面必拓扑等价于 M_p 型曲面.

注 本附录内容选自文献[10](中译本).

参考文献

1 苏步青,胡和生等.微分几何.北京:高等教育出版社,1979

2 陈省身.活动标架法.北京:北京大学演讲讲义,1978

3 Do Carmo M P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Inc., 1976[中译本:曲线和曲面的微分几何学.上海:上海科学技术出版社,1988]

4 Stoker J J. Differential Geometry. New York: Wiley-Int., 1969

5 Klingenberg W. A Course in Differential Geometry. Springer, 1978

6 白正国,沈一兵等.黎曼几何初步(修订版).北京:高等教育出版社,2004

7 沈一兵.二维球面上的 Codazzi 张量.科学通报,2004,37:481 ~ 484

8 Hsiung C C. A First Course in Differential Geometry. New York: John Wiley & Sons., 1981

9 Berger M & Gostiaux B. Differential Geometry: Manifolds, Curses, and Surfaces. Springer, G.T.M. 115, 1988

10 Ю. Г. Борисович 等. Введение В Топологию. Москва, 1980[中译本:拓扑学导论.北京:高等教育出版社,1992]

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝新世纪高等院校精品教材　　数学类　　整体微分几何初步（第２版）
作者＝沈一兵编著
页数＝２７４
ＳＳ号＝１１５４００７６
出版日期＝２００５年１０月第２版

前言

目录